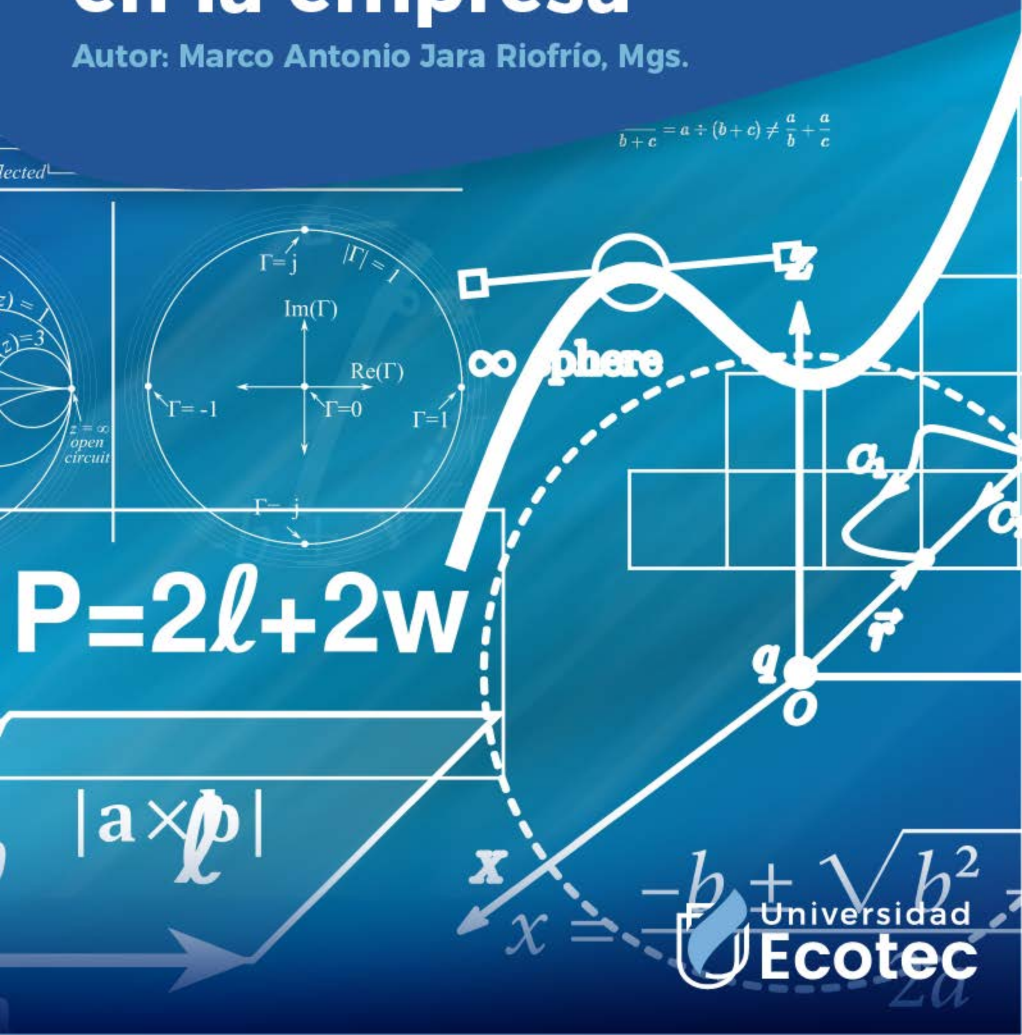
Cálculo integral y sus aplicaciones en la empresa

Autor: Marco Antonio Jara Riofrío, Mgs.



Universidad Ecotec

CÁLCULO INTEGRAL Y SUS APLICACIONES EN LA EMPRESA

AUTOR:

Marco Antonio Jara Riofrío, Mgs.

2017

TÍTULO

Cálculo Integral y sus Aplicaciones en la Empresa

AUTOR

Ing. Marco Antonio Jara Riofrío, Mgs.

AÑO

2017

EDICIÓN

MSc. Nadia Aurora González Rodríguez - Departamento de Publicaciones
MSc. Alejandra Mercedes Colina Vargas - Coedición
Universidad ECOTEC

ISBN

978-9942-960-21-4

NO. PÁGINAS

127

LUGAR DE EDICIÓN

Samborondón - Ecuador

DISEÑO DE CARÁTULA

Ing. Annabell Esperanza Aguilar Muñoz - Departamento de Relaciones Públicas y Marketing
Universidad ECOTEC

Contenido

DEDICATORIA

Al apoyo incondicional de mi esposa **Lupita** que en este año cumplimos 36 años de matrimonio, Eres mi verdadera bendición. Gracias por ser mi compañera y amiga.

A mis hijos: **Marco y Andrea** que con el apoyo y comprensión se logró plasmar este sueño.

Una dedicatoria especial a mis adorados nietecitos: **Samuel, Alejandra, Sofía y Renato. "Los nietos son ese pedacito de cielo que la vida me regaló".**

PRESENTACIÓN

El presente texto que se ofrece, no es un libro teórico, sino una herramienta de complementación para la práctica indispensable en la aplicación de las integrales en la administración empresarial. El buen uso que se haga de éste llevará a unificar la teoría con la realidad proporcionando los fundamentos matemáticos para estudiantes de administración, economía y negocios. Por esta razón, puede decirse que servirá de apoyo a los estudiantes de la Universidad ECOTEC en el proceso de enseñanza-aprendizaje en la materia de Cálculo.

El trabajo que comparto como autor del libro, es una recopilación de la experiencia asociada con los estudiantes y sus perspectivas con la realidad. Los ejercicios y problemas resueltos constituyen una ayuda para el mejoramiento de sus conocimientos técnicos y la aplicabilidad en el proceso educativo. Su contenido responde a un acuerdo general y tácito de lo que debe constituir un curso básico de Cálculo de funciones de una variable.

El objetivo del texto es involucrar a los docentes y estudiantes, en la utilización de una metodología interactiva, para adquirir destrezas e interpretar matemáticamente el entorno que le rodea, resolviendo problemas que competen al área Económica y Administrativa de una empresa, mejorando su capacidad en relación con la estructuración, fortalecimiento de sus ideas y razonamientos con la argumentación de sus resultados.

En relación con lo antes expuesto, el programa se estructura en dos bloques, **Integral Indefinida,** es el proceso recíproco de la derivada, que determina el conjunto de infinitas primitivas que puede tener una función, y en **Integral Definida,** o Integral de Riemann, es el límite de una suma cuando el número de sumandos tiende a infinito y cada uno de ellos tiende a cero, y está asociado al cálculo de áreas. La integral indefinida se subdivide en:

La primera unidad: Analizar el proceso de determinar la función, conociendo la misma denominándose antiderivada o la integral de la función dada. El estudiante con los conocimientos de las derivadas y la aplicación de las integrales podrá resolver ejercicios y problemas relacionados a la solución particular de una función determinada y establecer el valor de la constante C.

La segunda unidad: Aplicaciones de las integrales en la administración y economía, el objetivo principal, es que el estudiante aplique la integral indefinida en problemas de Economía, donde se realizará ejercicios teóricos y reales adaptados a determinar funciones de oferta y demanda, superávit de consumidores y productores, análisis marginales y pueda interpretar sus resultados.

La tercera unidad: Métodos de integración, se establece y coordina los diferentes métodos para calcular una antiderivada o integral indefinida de una función, estableciendo una solución más sencilla, y el estudiante aplique los conceptos de contabilidad, economía y administración para sugerir la solución de problemas relacionados con las empresas.

La cuarta unidad: Integral Definida, Integral Definida, dentro del estudio del cálculo integral, el cual es un tema que tiene mucha importancia, por lo que es necesario insistir en su concepción y sus aplicaciones, como aspectos esenciales para el entendimiento de diversos términos matemáticos. Además, la integral definida cuenta con diversos elementos, parámetros y lineamentos para poder ser aplicada dentro de las funciones, siendo el teorema fundamental del cálculo una de ellas, por lo que se aborda de manera ordenada y sistemática cada una de sus partes, indispensables para comprender y aplicar de manera correcta la integral. De esta forma, será más fácil el entendimiento de la misma, además de abordar las diversas aplicaciones prácticas que tiene mediante ejemplos, lo cual hace la explicación más clara y concisa.

La quinta unidad: Aplicaciones en la Administración y Economía, tiene como objetivo básico demostrar la aplicación de la matemática y el cálculo matemático en los aspectos y contenidos económicos, ya que son de uso diario, además de concientizar al estudiante de la utilización de la matemática en la vida. Se analiza cómo determinar entre el consumidor y productor; así como, calcular utilidad máxima con respecto al tiempo.

A modo de aclaración, en la primera y tercera unidad, se explican las anti derivadas y se ofrece una opción sobre cómo enfocar la integración. Después de exponer los diferentes métodos de integración, y sus aplicaciones en la Administración y Economía, es necesario que el estudiante, reconozca las diferentes técnicas, siendo indispensable dedicar el tiempo necesario para el análisis y solución de los diferentes problemas prácticos.

Con el presente trabajo se espera que sirva de herramienta para mejorar la calidad de la enseñanza de la matemática, facilitándole material al docente para impartir dichos conocimientos, y a su vez, contribuya para demostrarle al estudiante la gran utilidad de la matemática, motivándole a estudiar, además de servirle como consulta en sus estudios.

Este libro es una contribución para el enriquecimiento de la práctica educativa de la matemática, pues coloca a la disposición tanto de los docentes como de los alumnos, un material diferente y de fácil utilización para complementar y mostrar la aplicación real y práctica de esos contenidos matemáticos que el estudiante considera inaplicables al efectuar los cálculos, más allá de un cuaderno.

Agradezco, a los directivos de la Universidad ECOTEC, en especial al señor Decano, compañeros de Facultad de Sistemas, por el apoyo moral y técnico, lo cual propició el logro final de este texto complementario para el estudio de las derivadas.

Estimados lectores, aunque este texto fue examinado cuidadosamente, siempre se presentarán errores involuntarios, por lo que agradezco me hagan llegar, todos los errores que detecten, así como sus críticas y sugerencias.

El autor

INTRODUCCIÓN

El cálculo integral tiene sus principios en resolver problemas de cuadraturas en los que se determina calcular áreas de regiones planas limitadas por una o varias curvas. Se arroga a Eudoxo (ca.370 A.C.) la iniciativa del método de exhaución, como una técnica para calcular el área de una región acercando por una sucesión de polígonos de forma que en cada movimiento se mejora la aproximación anterior. Arquímedes (287-212A.C.) corrigió este método y calculó el área de un segmento de parábola y el volumen de un segmento de paraboloide, así como el área y el volumen de una esfera.

Asombra que, siendo tan antiguos sus orígenes, la definición básica matemática de integral no se conocía, hasta el siglo XIX por Augustin Louis Cauchy (1789-1857). La explicación es que, durante los siglos XVII y XVIII, la integración fue considerada como la operación inversa de la derivación; el cálculo integral radicaba esencialmente en el cálculo de primitivas.

Evidentemente, se conocía la utilidad de las integrales para determinar áreas y volúmenes, pero los matemáticos de la época consideraban estos elementos como proporcionados de forma automática y no vieron la necesidad de precisar su significación matemática. Los trabajos de Joseph Fourier (1768-1830) representa a las funciones por series trigonométricas crearon que el concepto de función evolucionara, desde la idea condicional de función como fórmula, hasta la definición moderna de función dada por Dirichlet en 1837.

Para entender el significado de la integral de estas nuevas funciones más generales se vio la necesidad de definir matemáticamente los conceptos de área y de volumen.

La singularidad de Cauchy es que unió dos ideas, la de límite y la de área, para dar una definición matemática de integral. Poco después Georg F.B. Riemann (1826-1866) generalizó la definición de integral dada por Cauchy.

La teoría de la integral de Riemann fue un progreso importante, pero, desde un punto de vista matemático, insuficiente. Hubo que esperar hasta el siglo XX para que Henri Lebesgue (1875-1941) estableciera en su libro los fundamentos de una teoría matemáticamente cómoda de la integración.

La integración es una herramienta muy importante del cálculo, no solo sirve para determinar áreas en regiones planas y curvas, y representar magnitudes físicas.

Su aplicación real, actualmente es las aplicaciones en la Administración y la Economía, así como determinar: Coeficientes de desigualdad para la distribución de ingresos.

Curvas de aprendizaje. Maximización de la utilidad con respecto al tiempo. Valor presente de un ingreso continuo. Superávit del consumidor y del productor.

UNIDAD I. INTEGRAL INDEFINIDA

Dada la función f, y F es una función tal

$$F'(x) = f(x)$$

entonces *F* se llama *anti* derivada de f o primitiva. Se puede decir que la anti derivada de f, es simplemente una función cuya derivada es f.

1. Definición.

Una anti derivada o primitiva de una función f, es una función F, tal que

$$F'(x) = f(x)$$

o su equivalente, en notación diferencial

$$dF = f(x)dx$$

Por ejemplo, la derivada de x^4 es $4x^3$; x^4 es la anti derivada de $4x^3$. Es muy importante determinar que no es la única anti derivada de $4x^3$, porque:

$$\frac{d}{dx}\left(x^4+3\right) = 4x^3 \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}\left(x^4-9\right) = 4x^3$$

En este caso, se toma en cuenta que tanto $\left(x^4+3\right)$ como $\left(x^4-9\right)$ también son anti derivadas de $4x^3$. Se sabe que la derivada de una constante es cero, x^4 + C, es también una anti derivada de $4x^3$ para cualquier contante C. Así, $4x^3$ tiene un número infinito de anti derivadas. Es muy importante, indicar que todas las anti derivadas de $4x^3$ deben ser funciones de la forma x^4 + C.

Como x^4 + C describe todas las anti derivadas de $4x^3$, se puede indicar como la <u>anti derivada más general</u> de $4x^3$, expresada por $\int 4x^3 dx$**,** se lee "integral indefinida de $4x^3$ con respecto a x", y se escribe:

$$\int 4x^3dx = 4\int x^3dx$$
$$= \frac{4x^4}{4} + C$$
$$= x^4 + C$$

El símbolo $\int$ se llama **símbolo de integración,** $4x^3$ es el **integrando,** y C la **constante de integración.** La dx, es parte de la anotación de la integración, determina la variable que se está utilizando. Aquí x, es la **variable de integración.**

Se puede definir que la **integral indefinida,** es cualquier función de f, con respecto a x, y se escribe $\int f(x)dx$ y expresa la anti derivada más general de f.

Como todas las anti derivadas de f, prorrogan de una constante, si F es cualquier anti derivada de f, entonces:

$\int f(x)dx = F(x) + C$ **si solo** $F'(x) = f(x)$

1. Ejemplo: Encontrar el integral indefinido de $\int 8dx$ **.**

SOLUCIÓN:

Se tiene que buscar una función cuya derivada sea 8 y luego se añade la constante de integración. Por tanto, se sabe que la derivada de 8x es 8, 8x es la anti derivada de 8, por lo tanto:

$$\int 8dx = 8x + C$$

2. Encuentra el integral de $\int x^2dx$

SOLUCIÓN:

Se debe examinar una función, donde su derivada sea x^2, como se sabe que la derivada de x^3 es $3x^2$. La derivada de $\frac{1}{3}x^3$ es $\frac{1}{3}(3x^2) = x^2$ **,** es decir que:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

2. Fórmulas Básicas de Integración

$\int dx = x + C$	Integral de la variable.
$\int kdx = kx + C$	**k** es una constante.
$\int kf(x)dx = k\int f(x) + C$	La constante sale, y se integra la función. restante.
$\int [f(x) +/- g(x)]dx = \int [f(x) +/- g(x)]dx = \int f(x)dx +/- g(x)dx + C$ Integral de una suma/resta de funciones.	
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$	Integral de una potencia.
$\int \frac{1}{x} dx = Ln\lvert x \rvert + C$	
$\int e^x dx = e^x + C$	
$\int Logxdx = xLogx + C$	
$\int Lnxdx = xLnx + C$	
$\int e^{(ax+b)} dx = \frac{e^{(ax+b)}}{a} + C \quad a \neq 0$	
$\int \frac{1}{x+a} dx = Ln\lvert x+a \rvert + C$	

Ejercicios Resueltos

1. Integrar $\int (3x^2 + 8x - 4)dx = \int 3x^2 dx + \int 8xdx - \int 4dx$

$$3\int x^2 dx + 8\int xdx - 4\int dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} - 4x$$

$$= x^3 + 4x^2 - 4x + C$$

2. Calcular la Integral $\int \left(x^2 + \frac{5}{x} \right)^2 dx$

Solución:

$$\int \left(x^2 + \frac{5}{x} \right)^2 dx = \int \left[x^4 + 2\left(x^2\right)\left(\frac{5}{x}\right) + \frac{25}{x^2} \right] dx$$

$$= \int x^4 dx + \int 10x dx + \int \frac{25}{x^2} dx$$

$$= \frac{x^5}{5} + 10\int x dx + 25\int x^{-2} dx$$

$$= \frac{x^5}{5} + 5x^2 - \frac{25}{x}$$

$$= \frac{x^6 + 25x^3 - 125}{5x} + C$$

3. Determinar la integral

Solución:

$$\int \frac{3\sqrt[3]{x^2} + 10x^3 - 7ex + 4}{x} dx = \int \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{x} dx + 10\int \frac{x^3}{x} dx - 7e\int \frac{x}{x} dx + 4\int \frac{1}{x} dx$$

$$= 3\int x^{-\frac{1}{3}} dx + 10\int x^2 dx - 7e\int dx + 4Ln|x|$$

$$= 3\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + \frac{10x^3}{3} - 7ex + 4Ln|x|$$

$$= \frac{9x^{\frac{2}{3}}}{2} + \frac{10x^3}{3} - 7ex + 4Ln|x| + C$$

4. Determinar la $f(x)$ si $f'(x) = \left(x^3 + 1\right)\left(3x - 2\right)$ y $f(1) = 6$

Solución:

Se desarrolla el paréntesis, se obtiene $f'(x) = 3x^4 - 2x^3 + 3x - 2$

$$f(x)=\int\left(3x^4-2x^3+3x-2\right)dx=\int 3x^4dx-\int 2x^3dx+\int 3xdx-\int 2dx$$
$$f(x)=\frac{3x^5}{5}-\frac{x^4}{2}-\frac{3x^2}{2}-2x+C$$

C, es una constante desconocida, en este caso da que $f(1)=6$, que permite determinar el valor de C.

$$f(1)=\frac{3(1)^5}{5}-\frac{(1)^4}{2}-\frac{3(1)^2}{2}-2(1)+C$$
$$=06-05-1.5-2+C$$
$$C-3.4=6$$
$$C=2.6$$
$$f(x)=\frac{3x^5}{5}-\frac{x^4}{2}-\frac{3x^2}{2}-2x+2.6$$

5. Determinar el integral de la función $\dfrac{3x^4-12}{x^2+2}$

Solución:

Cuando se tiene una expresión fraccionaria, se puede resolver de dos formas; una factorizando la expresión, y si no se puede se debe realizar la división indicada.

$$f'(x)=\frac{3x^4-12}{x^2+2}=\frac{3\left(x^4-4\right)}{x^2+2}=\frac{3\left(x^2+2\right)\left(x^2-2\right)}{x^2+2}=3x^2-6$$

Factorizando $f(x)=\int\left(3x^2-6\right)dx=3\int x^2dx-6\int dx$

$$=\frac{3x^3}{3}-6x=x^3-6+C$$

6. Una empresa actualmente produce 220 unidades por semana de un producto. Si el costo de producir x unidades en una semana está dada por la función:

$$C'(x)=30-0.03x$$

Suponiendo que este costo marginal todavía se aplique. Determinar el costo extra por semana que se debe considerar al elevar la producción de 200 a 250 unidades por semana.

Solución:

La función del costo se obtiene integrando el costo marginal:

$$C(x) = \int (30 - 0.03x)dx = \int 30dx - \int 0.03x dx$$

$$= 30x - \frac{0.03x^2}{2} = 30x - 0.015x^2$$

$$C(200) = 30(200) - 0.015(200)^2 = 6000 - 600 = 5400$$

$$C(150) = 30(150) - 0.015(150)^2 = 4500 - 337.5 = 4162.5$$

$$C(200) - C(150) = 5400 - 4162.5 = \$1237.5$$

EJEMPLO 7 (Ingreso y demanda) El ingreso marginal de una empresa está dado por

I′(x) 20- 0.01x

a) Determine la función de ingreso.

b) Encuentre la relación de demanda para el producto de la empresa.

Solución:

La función del Ingreso se obtiene por medio de la integral del Ingreso marginal:

$$I(x) = \int (20 - 0.01x)dx = \int 20dx - \int 0.01x dx$$

$$= 20x - \frac{0.01x^2}{2} = 20x - 0.005x^2$$

$$a) 20x - 0.005x^2$$

$$I = x * p$$

$$p = \frac{I}{x}$$

$$p = \frac{20x - 0.005x^2}{x} = 20 - 0.005x$$

3. Integrales Con Condiciones Iniciales

Se ha dicho que la ecuación y =∫f(x)dx admite infinitas soluciones que difieren en una constante. Esto significa que las gráficas de dos primitivas cualesquiera de f son traslaciones verticales una de la otra.

Por ejemplo, si tengo la función $y' = 3x^2 - 1$ La solución general será $y = \int (3x^2 - 1)dx = x^3 - x + C$, para diversos valores enteros de C.

Una solución particular de esta ecuación será una única primitiva, es decir, si se conoce el valor de la constante C. En muchas aplicaciones de la integración, hay información suficiente como para conocer este valor particular de C. Esta información se llama **condición inicial** (que abreviamos como c.i.) nombre debido al hecho que, en las aplicaciones, generalmente la variable independiente es el tiempo.

En el ejemplo si $y(1) = 4$ se tiene :

$$y(1) = (1)^3 - 1 + C$$
$$4 = C$$
$$y = x^3 - x + 4$$

Ejemplo de aplicación con condición inicial

1. Si y, es una función de x, tal que $y' = 7x - 3$, y $y(2) = 4$, encontrar el valor de y.

Solución:

$$y = \int (7x - 3)dx = 7\int xdx - 3\int dx$$
$$= \frac{7x^2}{2} - 3x + C$$

Se puede determinar el valor de C por medio de la condición inicial. Como y=4 cuando x=2, tenemos

$$4 = \frac{7(2)^2}{2} - 3(2) + C$$
$$4 = 14 - 6 + C$$
$$C = -4$$
$$y = \frac{7x^2}{2} - 3x - 4$$

2. Si $y'' = x^3 - 5$ $\begin{matrix} y'(0) = 3 \\ y(2) = 2 \end{matrix}$ encontrar el valor de y.

Solución:

Como $y'' = \frac{d}{dx}(y') = x^3 - 5$, y' es la anti derivada de $x^3 - 5$, por lo que:

$$y' = \int (x^3 - 5)dx = \frac{x^4}{4} - 5x + C_1$$
$$y'(0) = 3 \rightarrow x = 0$$
$$3 = \frac{0^4}{4} - 5(0) + C_1$$
$$C_1 = 3$$
$$y' = \frac{x^4}{4} - 5x + 3$$

Por integración se obtiene el valor de y:

$$y = \int \left(\frac{x^4}{4} - 5x + 3 \right) dx$$
$$y = \frac{x^5}{20} - \frac{5x^2}{2} + 3x + C_2$$
$$y(2) = 2 \rightarrow x = 2$$
$$2 = \frac{(2)^5}{20} - \frac{5(2)^2}{2} + 3(2) + C_2$$
$$2 = 1.6 - 10 + 6 + C_2$$
$$C_2 = -4.6$$
$$y = \frac{x^5}{20} - \frac{5x^2}{2} + 3x - 4.6$$

3. Determinación de la demanda a partir del ingreso marginal.

Si la función del ingreso marginal del producto de una empresa es:

$$I'(x) = 2050 - 18x - 4x^2$$

Encontrar la función de la demanda

Solución:

$$I(x) = \int (2050 - 18x - 4x^2)dx$$
$$I(x) = \int 2050dx - \int 18xdx - \int 4x^2dx$$
$$I(x) = 2050x - \frac{18x^2}{2} - \frac{4x^3}{3} + C$$
$$I(x) = 2050x - 9x^2 - 1.3x^3 + C$$

Suponiendo que no se ha vendido ninguna unidad, el ingreso total es cero; esto es cuando I=0 x=0, determinado C=0, quedando la función:

$$I(x) = 2050x - 9x^2 - 1.3x^3$$

Como I=xp. Determinamos que la demanda p=I/x

$$I(x) = 2050x - 9x^2 - 1.3x^3$$

$$p = \frac{I}{x} = \frac{2050x - 9x^2 - 1.3x^3}{x}$$

$$p = 2050 - 9x - 1.3x^2$$

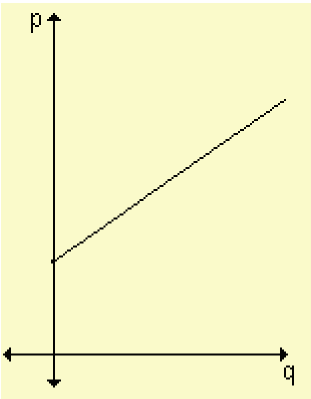
UNIDAD 2. APLICACIONES DE INTEGRALES A LA ADMINISTRACIÓN Y ECONOMÍA

Entre las funciones que se utilizan en economía para hacer modelos de situaciones de mercado se estudian las funciones de oferta y demanda.

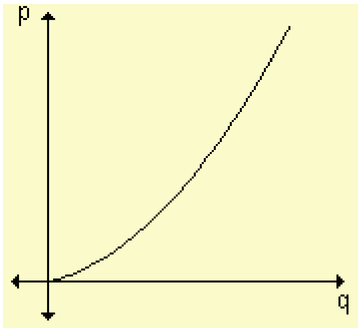
1. Función de la Oferta:

Una empresa que fabrica y vende un determinado producto utiliza esta función para relacionar la cantidad de productos que está dispuesta a ofrecer en el mercado con el precio unitario al que se puede vender esa cantidad. Se puede decir que, en respuesta a distintos precios, existe una cantidad adecuada de productos que los fabricantes están dispuestos a ofrecer en el mercado en un período específico.

Cuanto mayor es el precio, mayor será la cantidad de productos que la empresa está dispuesta a ofrecer. Al reducirse el precio, se reduce la cantidad ofrecida. Esto permite asegurar que la función de oferta es una función creciente. Si p representa el precio por unidad y q la cantidad ofrecida correspondiente entonces a la ley que relaciona p y q se la denomina función de oferta y a su g



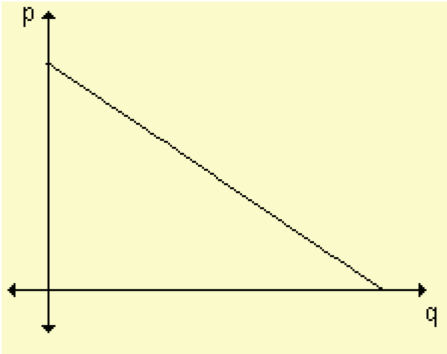
Fuente: Elaboración propia

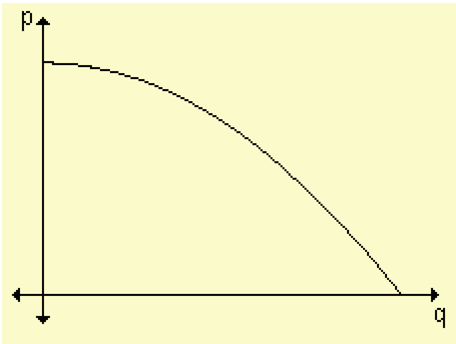


Fuente: Elaboración propia

2. Función de la Demanda

La empresa utiliza esta función para relacionar la cantidad de productos demandados por los consumidores, con el precio unitario al que se puede vender esa cantidad, de acuerdo con la demanda. En general, si el precio aumenta, se produce una disminución de la cantidad demandada del artículo porque no todos los consumidores están dispuestos a pagar un precio mayor por adquirirlo. La demanda disminuye al aumentar el precio por eso ésta es una función decreciente como se observa en los ejemplos gráficos. Entonces, se puede asegurar que para cada precio de un producto existe una cantidad correspondiente de éste que los consumidores demandan en determinado período. Si el precio por unidad de un producto está dado por p y la cantidad correspondiente en unidades está dada por q la ley que los relaciona se denomina función de demanda. A su gráfica se la llama gráfica de demanda.





Fuente: Elaboración propia

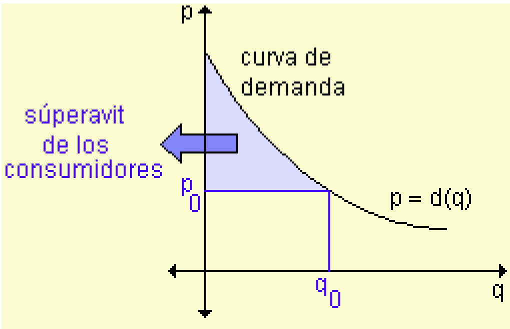
Fuente: Elaboración propia

A esta función se simboliza: p = d(q) donde sabemos que p es el precio unitario y q la cantidad de productos que, a ese precio, se demanda en el mercado.

3. Superávit de Consumidores y Productores

El mercado determina el precio al que un producto se vende. El punto de intersección de la curva de la demanda y de la curva de la oferta para un producto da el precio de equilibrio. En el precio de equilibrio, los consumidores comprarán la misma cantidad del producto que los fabricantes quieren vender. Sin embargo, algunos consumidores aceptarán gastar más en un artículo que el precio de equilibrio. El total de las diferencias entre el precio de equilibrio del artículo y los mayores precios que todas esas personas aceptan pagar se considera como un ahorro de esas personas y se llama el superávit de los consumidores.

El área bajo la curva de demanda es la cantidad total que los consumidores están dispuestos a pagar por q_0 artículos. El área sombreada bajo la recta y = p_0 muestra la cantidad total que los consumidores realmente gastarán en el precio p_0 de equilibrio. El área entre la curva y la recta representa el superávit de los consumidores.



Fuente: Elaboración propia

El superávit de los consumidores está dado por el área entre las curvas p = d(q) y p = p_0 entonces su valor puede encontrarse con una integral definida de esta forma:

$\int_0^{q_0} [d(q) - p_0]dq$ donde d(q) es una función demanda con precio de equilibrio p_0 y demanda de equilibrio q_0.

Ejemplos de aplicación

1. La curva de demanda está dada por la ley d(x) = 50 - 0,06x^2. Encuentre el superávit o ganancia de los consumidores si el nivel de venta asciende a veinte unidades.

Solución:

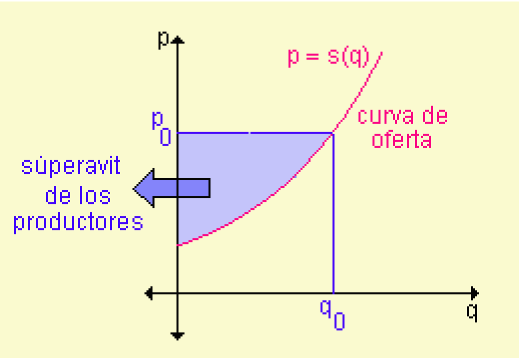
Como la cantidad de unidades es 20, su precio $p = d(20) = 50 - 0.06(20)^2 = 26$

La ganancia del consumidor será:

$$\int_0^{20}\left(50-0.06x^2-26\right)dx=\int_0^{20}50dx-\int_0^{20}0.06x^2dx-\int_0^{20}26dx$$

$$\left[24x-\frac{0.06x^3}{3}\right]_0^{20}=\left[24(20)-0.02(20)^3\right]-\left[24(0)-0.02(0)^3\right]=\$320$$

De la misma manera si algunos fabricantes estuviesen dispuestos a proporcionar un producto a un menor precio que el precio p_0 de equilibrio, el total de las diferencias entre el precio de equilibrio y los precios más bajos a los que los fabricantes venderían el producto se considera como una entrada adicional para los fabricantes y se llama el superávit de los productores.



Fuente: Elaboración propia

El área total bajo la curva de oferta entre q = 0 y q = q_0 es la cantidad mínima total que los fabricantes están dispuestos a obtener por la venta de q_0 artículos. El área total bajo la recta p = p_0 es la cantidad realmente obtenida. La diferencia entre esas dos áreas, el superávit de los productores, también está dada por una integral definida.

Si s(q) es una función de oferta con precio p_0 de equilibrio y oferta q_0 de equilibrio,

entonces superávit de los productores = $\int_0^{q_0}\left[p_0-S(q)\right]dq$

2. Se conoce que la curva de la oferta para un producto es $S(x)=\frac{x}{2}+7$.

   Encuentre la ganancia de los productores si la producción asciende a diez artículos.

Solución:

Si la producción asciende a 10 unidades el precio es $S(10)=\frac{10}{2}+7=\$12$. La ganancia o superávit de los productores se determina:

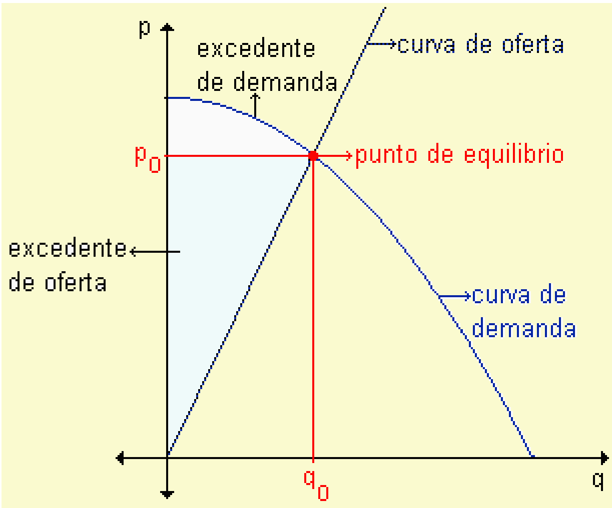
$$\int_0^{10}\left|12-\left(\frac{x}{2}\right)+7\right|dx=\int_0^{10}\left(5-\frac{x}{2}\right)dx=\int_0^{10}5dx-\int_0^{10}\frac{x}{2}dx$$

$$=\left[5x-\frac{x^2}{4}\right]_0^{10}=\left[5(10)-\frac{(10)^2}{4}\right]-\left[5(0)-\frac{(0)^2}{4}\right]=\$25$$

3. **3.** Calcule el exceso de oferta y el exceso de demanda para las curvas de demanda y oferta dadas. Función de demanda: $p_1(q) = 1000 - 0,4\,q^2$. Función de oferta: $p_2(q) = 42q$

Solución:

El exceso de oferta y el de demanda están representados por las áreas que muestra la gráfica:



Fuente: Elaboración propia

oferta coincide con la demanda en (q_0, p_0), es decir,

$p_1(q) = p_2(q)$ Þ $1000 - 0,4q^2 = 42q$ Þ $- 0,4q^2 - 42q + 1000 = 0$ Þ

$q_1 = -125$ Ù $q_2 = 20$

Como los valores de las abscisas corresponde a número de artículos ofrecidos o demandados, $q_0 = 20$ y, por lo tanto, $p_0 = 840$.

El excedente de demanda o superávit de los consumidores es la región comprendida entre p_1 (q) y la recta p = 840, entre 0 y 20, o sea,

$$\int_0^{20}\left(1000-0.4q^2+840\right)dq=\int_0^{20}\left(160-0.4q^2\right)dq=\left[160q-\frac{04q^3}{3}\right]_0^{20}=\$2133.33$$

El excedente de la demanda es $2133.33.

El excedente de la oferta está en la región comprendida entre la recta p=840 y p= 42q; entre 0 y 20, es decir:

$$\int_0^{20}\left(840-42q\right)dq=\left[840q-\frac{42q^2}{2}\right]_0^{20}=\$8400$$

4. Análisis Marginal

La derivada y, en consecuencia, la integral, tienen aplicaciones en administración y economía en la construcción de las tasas marginales.

Es importante para la investigación económica, este trabajo con el análisis marginal porque permitirá calcular el punto de maximización de utilidades.

En el análisis marginal se examinan los efectos incrementales en la rentabilidad. Si una empresa está produciendo determinado número de unidades al año, el análisis marginal se ocupa del efecto que se refleja en la utilidad si se produce y se vende una unidad más.

Para que este método pueda aplicarse a la maximización de utilidades se deben cumplir las siguientes condiciones:

- Deberá ser posible identificar por separado las funciones de ingreso total y de costo total.

- Las funciones de ingreso y costo deben formularse en términos del nivel de producción o del número de unidades producidas y vendidas.

4.1 COSTO MARGINAL: es el costo adicional que se obtiene al producir y vender una unidad más de un producto o servicio programado.

También se puede definir como el valor límite del costo promedio por artículo extra cuando este número de artículos extra tiende a cero.

Se puede pensar en el costo marginal como el costo promedio por artículo extra cuando se efectúa un cambio muy pequeño en la cantidad producida.

Se debe tener en cuenta que si c(x) es la función costo, el costo promedio de producir x artículos es el costo total dividido por el número de artículos producidos.

Costo promedio por artículo = C(x)/x

Costo marginal = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta c}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{c(x+\Delta x) - c(x)}{\Delta x}$

Costo marginal = c'(x) = $\frac{dc}{dx}$

El costo marginal mide la tasa con que el costo se incrementa con respecto al incremento de la cantidad producida.

4.2 INGRESO MARGINAL: es el ingreso adicional que se consigue al vender una unidad más de un producto o servicio.

Para una función de ingreso total I(x), la derivada I'(x) representa la tasa instantánea de cambio en el ingreso total con un cambio del número de unidades vendidas. Por lo que se puede decir que el ingreso marginal representa las entradas adicionales de una empresa por artículo adicional vendido cuando ocurre un incremento muy pequeño en el número de artículos vendidos. Representa la tasa con que crece el ingreso con respecto al incremento del volumen de ventas.

4.3 UTILIDAD MARGINAL: de una empresa está dada por la diferencia entre sus ingresos y sus costos. Si la función de ingreso es I(x) cuando se venden x artículos y si la función de costo es c(x) al producirse esos mismos artículos, la utilidad U(x) obtenida por producir y vender x artículos está dada por U(x) = I(x) – c(x).

La derivada U'(x) se denomina utilidad marginal y representa la utilidad por artículo si la producción sufre un pequeño incremento.

4. Se supone que durante los primeros cinco años que un producto se puso a la venta en el mercado la función f(x) describe la razón de ventas cuando pasaron x años desde que el producto se presentó en el mercado por primera vez.

Se sabe que $f(x) = 2700\sqrt{x} + 900$ si $0 \le x \le 5$ Calcule las ventas previstas durante los primeros cuatros años.

Solución:

Se debe determinar la venta total

$$\int_0^4 \left(2700\sqrt{x} + 900\right)dx = 2700\int_0^4 \sqrt{x}dx + 900\int_0^4 dx$$

$$= \left[\frac{2700\left(2x^{\frac{3}{2}}\right)}{3} + 900x\right]_0^4 = \frac{5400(4)^{\frac{3}{2}}}{3} + 900(4) = 18000 unid.$$

5. Se espera que la compra de una nueva máquina genere un ahorro en los costos de operación. Cuando la máquina tenga x años de uso la razón de ahorro sea de f(x) pesos al año donde f(x) = 1000 + 5000x.

a) ¿Cuánto se ahorra en costos de operación durante los primeros seis años?

b) Si la máquina se compró a $ 67500 ¿cuánto tiempo tardará la máquina en pagarse por sí sola?

Solución:

a) Para conseguir el ahorro durante los primeros seis años se calcula:

$$\int_0^6 (1000 + 5000x)dx = \left[1000x + \frac{5000x^2}{2}\right]_0^6 = 1000(6) + \frac{5000(6)^2}{2} = 6000 + 90000 = \$96000$$

b) Si se compró a \$67500, el número de años que se requiere para pagarse por sí solo es:

$$\int_0^n (1000 + 5000x)\,dx = 67500$$

$$\left[1000x + \frac{5000x^2}{2}\right]_0^n = 67500$$

$$1000n + 2500n^2 = 67500$$

$$2500n^2 + 1000n - 67500 = 0$$

$$n = 5 \text{ años}$$

$$n = -5$$

Resolver los siguientes problemas.

1. Una función de costo marginal está definida por c'(x) = $3x^2$ + 8x + 4 y el costo fijo es de \$6. Determine la función costo total correspondiente.

2. Para un artículo particular, la función de ingreso marginal es i'(x) = 15 - 4x. Si x unidades son demandadas cuando el precio por unidad es de p pesos:

a) Determine la función ingreso total.

b) Determine la ecuación de demanda.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **En los siguientes ejercicios calcule la integral indefinida y compruebe el resultado por derivación**

a. $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$ b. $\int \frac{1}{x^3}dx$ c. $\int \frac{1}{x\,\sqrt[4]{x^3}}dx$ d. $\int \frac{x}{2x^5}dx$

e. $\int \left(x^{\frac{1}{3}} + 3e^2x^2 - 2x\right)dx$ f. $\int y\sqrt[2]{y^5}\,dy$ g. $\int \frac{t^4 - 3t^2 + 5}{t}dt$

h. $\int (\sqrt{x} + 2)(x^2 + \sqrt{x} - 1)\,dx$ $\int \frac{1}{x^2\,\sqrt[5]{x^2}}\,dx$

2. Resolver las siguientes integrales

$$\int \left(x^4 - 6x^2 - 2x + 4\right)dx \qquad \int \left(3\sqrt{x} + \frac{10}{x^6}\right)dx$$

$$\int \frac{x^2 + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \int \left(\sqrt{5x} + \sqrt{\frac{5}{x}}\right)dx$$

$$\int \frac{3\sqrt{x} - 5\sqrt[3]{x^2}}{2\sqrt[4]{x}}\,dx \qquad \int \sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int \sqrt[3]{x\sqrt{\frac{2}{x}}}\,dx \qquad \int \frac{(2\ln x)^2}{4x}\,dx$$

$$\int \frac{\ln x^2}{x}\,dx \qquad \int \frac{2x^3 + x^2 - x}{x^2}\,dx$$

$$\int \frac{t^4 - 3t^2 + 5}{t}\,dt \qquad \int \frac{2\ln x^2}{\ln x^3}\,dx$$

$$\int \frac{2x - 18}{\sqrt{x} + 3}\,dx \qquad \int \frac{16s - 4}{3 - 2s + 4s^2}\,ds$$

$$\int \frac{e^x - e^{3x}}{e^x}\,dx \qquad \int \left[7e^u - u^4\left(\sqrt[3]{u} + 1\right)\right]du$$

$$\int \frac{\left(x^3 - 1\right)^2}{x^2}\,dx \qquad \int \frac{x^3}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int \frac{Lnx^4}{Lnx^{\frac{1}{2}}}\,dx \qquad \int \frac{x - 8}{2 - \sqrt[3]{x}}\,dx$$

$$\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4}\right)dx \qquad \int \left(6\sqrt{x} - \frac{3}{10}x^3\right)dx$$

$$\int (\sqrt[3]{x^2} + x^3)^2\,dx \qquad \int \frac{(1 - x)^2}{x\sqrt{x}}\,dx$$

$\int \frac{x-8}{2-\sqrt[3]{x}}dx$

$\int x^2(x+\frac{2}{\sqrt{x}})dx$

$\int \frac{5x^3-5x}{\sqrt[3]{x}}dx$

$\int (3z^2+6)^3 dz$

$\int \left(2+\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx$

$\int (1+x)(1+2x)(1+3x)dx$

$\int \frac{\sqrt{x}+3\sqrt[5]{x^3}-1}{\sqrt[3]{x}}dx$

$\int \frac{3^{x+1}-4^{x-1}}{12^x}dx$

$\int \frac{2e^x+e^{2x}}{e^x}\ dx$

$\int_{-3}^{0} \frac{dx}{9+2x}$

3.Resuelva los problemas utilizando marginales.

3.1. (Costo marginal) La función de costo marginal de una empresa es

C′(x) 20 + 0.06x

a) Determinar la función de costo C(x), si los costos fijos de la empresa son de $2500 por mes.

b) ¿Cuánto costará producir 160 unidades en un mes?

c) Si los artículos se pueden vender a $59 cada uno, ¿cuántos deben producirse para maximizar la utilidad?

3.2 (Costo marginal) El costo marginal de cierta empresa está dado por $C'(x)=23-0.02x+0.006x^2$ Si el costo de producir 250 unidades es de $23,800, encuentre:

a) la función de costo;

b) los costos fijos de la empresa;

c) el costo de producir 500 unidades.

d) Si los artículos pueden venderse a $95 cada uno, determine el nivel de producción que maximiza la utilidad.

3.3 (Costo marginal) El costo marginal de los Productos ERT es $C'(x) = 2 + 0.001x$. y el costo de fabricar 110 unidades es $1008. ¿Cuál es el costo de producir 210 unidades? Los artículos se venden a $5 cada uno. Determine el incremento en la utilidad si el volumen de venta se incrementa de 1000 a 2000.

3.4 (Costo marginal) El costo marginal de cierta empresa es $C'(x)\ 5 + 0.003x$. ¿Cuáles son los costos totales variables de fabricar x unidades?

3.5 (Ingreso marginal) La función de ingreso marginal de cierta empresa es

$$I'(x) = 3 - 0.01x$$

a) Determine el ingreso obtenido por la venta de x unidades de su producto.

b) ¿Cuál es la función de demanda del producto de la empresa?

.**3.6** (Ingreso marginal) La función de ingreso marginal de cierta empresa es

$$I'(x) = 23 - 0.02x + 0.006x^2$$

a) Encontrar la función del Ingreso.
b) ¿Cuánto ingreso se obtendrá si se vende 110 unidades del producto de la empresa?
c) ¿Cuál es la función de la demanda?

3.7 (*Utilidad marginal)* La función de utilidad marginal de una empresa es

$$U'(x) = 5 - 0.02x$$

y la empresa obtiene una utilidad de $310 al venderse 100 unidades. ¿Cuál es la función de utilidad de la empresa?

3.8 (Ingreso marginal) La función de ingreso marginal de cierta empresa es

$$I'(x) = 60 - 0.03x + 0.0018x^2$$

a) Determine la función de ingreso.

b) ¿Cuál es el ingreso que se obtendrá por la venta de 200 unidades del producto de la empresa?

c) Determine la función de demanda del producto de la empresa.

3.9 (Costo promedio) Un fabricante ha determinado que la función de costo marginal es

$$C'(x) = 0.003x^2 - 0.4x + 50$$

donde x es el número de unidades producidas. Si el costo marginal es de $28.50 cuando x=50 y los costos fijos son de $5500, ¿cuál es el costo promedio de producir 100 unidades?

3.10 (Curva de aprendizaje) Después que una persona ha estado trabajando por t horas con una máquina en particular, habrá rendido x unidades, en donde la tasa de rendimiento (número de unidades por hora) está dada por

$$\frac{dx}{dt} = 20\left(1 - e^{\frac{-t}{30}}\right)$$

a) ¿Cuántas unidades de rendimiento alcanzará la persona en sus primeras 20 horas?
b) ¿Cuántas unidades de rendimiento alcanzará la persona en sus segundas 20 horas?

4.Encuentre la función de consumo sujeta a la condición dada:

a. $y' = (4-2x)^2; y(0) = 1$

b. $y' = \dfrac{x}{x^2+5}; y(1) = 0$

c. $y'' = \dfrac{1}{x^2}; y'(-1) = 1, y(1) = 0$

d. $y'' = \sqrt{x-2}; y'(2) = \dfrac{1}{2}, y(2) = -\dfrac{7}{12}$

e. $y'' = -x^2 + 2x; y'(1) = 0, y(1) = 1$

f. $y'' = x + 1; y'(0) = 0, y(0) = 4$

g. $y''' = 2x; y''(-1) = 3, y'(3) = 10, y(0) = 13$

h. $y''' = e^x + 1; y''(0) = 1, y'(0) = 3, y(0) = 4$

UNIDAD III. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

Para la resolución de integrales se utilizan diferentes artificios de cálculo, cuyo objetivo es transformar la expresión a integrar en otra, u otras, de integración más sencilla.

A dichos artificios se les denominan métodos de integración. En este tema van a estudiar lo siguiente:

1. Integración por sustitución o cambio de variable.
2. Integración por partes.
3. Integración de funciones racionales.

1. Integración Por Sustitución O Cambio De Variables

El método consiste en sustituir el integrando o parte de éste por otra función para que la expresión resultante sea más fácil de integrar, se aplica la "regla de la cadena". Si se escoge un cambio de variable de modo que al aplicarlo se obtiene en el integrando una función multiplicada por su derivada, la integral será inmediata. Pero en ocasiones un cambio mal escogido puede complicar más la integral.

El papel de la sustitución en la integración es comparable al de la regla de la cadena en la derivación. Recordar que para funciones derivables dadas por la $y = F(u); u = g(x)$**,** la regla de la cadena establece que

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x)$$

De acuerdo con el concepto de primitiva o anti derivada, se tiene

$$\int F'(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

Con un **cambio de variables** formal se puede reescribir por completo la integral en términos de *u* y *du* (o cualquier otra variable conveniente). Aunque este procedimiento puede involucrar más pasos que el reconocimiento de patrones complicados. La técnica del cambio de variable utiliza la notación de Leibniz para la diferencial. Esto es, si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)\,dx$,

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C$$

Cuando piden determinar la integral de: $\int \sqrt{2x+3}dx$, la solución será:

Se determina que U = 2x+3, se encuentra que du = 2dx, por lo tanto, dx = du/2

Se determina que:

$$\int \sqrt{2x+3}dx = \int (2x+3)^{\frac{1}{2}}dx = \int U^{\frac{1}{2}}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int U^{\frac{1}{2}}du$$

$$= \frac{1}{2} * \frac{2}{3}U^{\frac{3}{2}} = \frac{U^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{(2x+3)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

Este ejemplo, es un tipo especial denominado **sustitución lineal.** De la fórmula para resolver integrales por sustitución, se establece que u = ax+b, donde a y b son constantes (a≠0). Se transforma, g(x) = ax +b y g'(x) = a

La fórmula se transforma $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$

Interpretando, que para integrar f(ax+b), se trata (ax+b) como si fuera una sola variable, y después se divide la integral resultante entre a, el coeficiente de x.

Ejemplo de aplicación:

1.Resolver $\int x\sqrt{1-x}dx$

Solución:

$$\int x\sqrt{1-x}dx = \int x(1-x)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$u = 1-x \Rightarrow x = 1-u$$

$$\frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow du = -dx \Rightarrow dx = -du$$

$$\int x\sqrt{1-x}dx = \int (1-u)u^{\frac{1}{2}}(-du) = \int -u^{\frac{1}{2}}du + \int u^{\frac{3}{2}}dx$$

$$\frac{-2u^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5} = \frac{-2(1-x)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{2(1-x)^{\frac{5}{2}}}{5} + C$$

2.Resolver $\int \frac{t^2}{t-1}dt$

Solución:

$$\int \frac{t^2}{t-1}dt$$
$$u = t-1 \Rightarrow t = u+1 \Rightarrow t^2 = u^2 + 2u + 1$$
$$du = dt$$
$$\int \frac{t^2}{t-1}dt = \int \frac{u^2+2u+1}{u}du = \int \frac{u^2}{u}du + 2\int \frac{u}{u}du + \int \frac{1}{u}du$$
$$\int \frac{t^2}{t-1}dt = \frac{u^2}{2} + 2u + Ln|u|$$
$$\int \frac{t^2}{t-1}dt = \frac{(t-1)^2}{2} + 2(t-1) + Ln|t-1| + C$$

En esta sección se resolverá integrales indefinidas por medio de este método. Los integrando son funciones racionales, con raíces, con funciones trigonométricas, raíces en el denominador, logaritmos...

Ejemplos de aplicación

1.Resolver $\int (3x^2 - 4x)^4 (6x-4)dx$

Solución:

No se puede aplicar, alguna fórmula conocida; para lo cual se verifica si se puede utilizar el método de sustitución, debe aparecer la función y su derivada en el enunciado:

$$u = (3x^2 - 4x)$$
$$\frac{du}{dx} = 6x - 4$$
$$du = (6x-4)dx$$
$$\int (3x^2 - 4x)^4 (6x-4)dx = \int u^4 du = \frac{u^5}{5}$$

Se sustituye el valor de u, con el valor original y se obtiene:

2. Resolver $\int \frac{(3\ln x+8)^3}{x}dx$ Aquí se aplica derivada de logaritmos naturales

Solución:

$$u = 3\ln x + 8$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{3}{x}$$
$$du = \frac{3}{x}dx$$
$$\frac{du}{3} = \frac{1}{x}dx$$
$$\int \frac{(3\ln x+8)^3}{x}dx = \int u^3\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^3 du = \frac{1}{3}\frac{u^4}{4} = \frac{u^4}{12}$$
$$\int \frac{(3\ln x+8)^3}{x}dx = \frac{(3\ln x+8)^4}{12} + C$$

3. Resolver $\int x^5 e^{x^6}dx$

Solución:

$$\int x^5 e^{x^6}dx = u = x^6$$
$$du = 6x^5 dx$$
$$\frac{du}{6} = x^5 dx$$
$$\int x^5 e^{x^6}dx = \int e^u \frac{du}{6} = \frac{1}{6}\int e^u du = \frac{e^u}{6}$$
$$= \frac{e^{x^6}}{6} + C$$

Cuando en la función no aparece su derivada, es un tipo especial llamada **Sustitución Lineal**, donde en el teorema $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C$**,** se elige u= ax +b, donde a y b son constantes (a≠0). Es decir $\begin{matrix} g(x) = ax+b \\ g'(x) = a \end{matrix}$ Transformándose el teorema en $\int f(ax+b)dx = F(ax+b)+C$

Ejemplo de aplicación

4.Resolver:

$$\int \sqrt{5x-2}\,dx = \int (5x-2)^{\frac{1}{2}}dx$$
$$u = 5x-2$$
$$du = 5dx$$
$$\frac{du}{5} = dx$$
$$\int (5x-2)^{\frac{1}{2}}dx = \int u^{\frac{1}{2}}\frac{du}{5} = \frac{1}{5}\int u^{\frac{1}{2}}du$$
$$= \frac{1}{5} * \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{15} = \frac{2(5x-2)^{\frac{3}{2}}}{15} + C$$

5.Resolver:

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \int x(x-1)^{\frac{1}{2}}dx$$
$$u = x-1 \rightarrow x = u+1$$
$$\frac{du}{dx} = 1 \rightarrow du = dx$$
$$\int x(x-1)^{\frac{1}{2}}dx = \int \ (u+1)u^{\frac{1}{2}}du$$
$$\int u^{\frac{3}{2}}du + \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{6u^{\frac{5}{2}} + 10u^{\frac{3}{2}}}{15}$$
$$= \frac{6(x-1)^{\frac{5}{2}} + 10(x+1)^{\frac{3}{2}}}{15} + C$$

6.(Tasa de desempleo) Durante una crisis económica reciente, el porcentaje de desempleados creció a razón de

$$p'(t) = \frac{0.4e^{-0.1t}}{\left(1+e^{-0.1t}\right)^2}$$

donde t es el tiempo en meses. Dado que en t = 0 había 4% de desempleados, ¿qué porcentaje estaba desempleado: a) 10 meses después? b) 20 meses después?

$$p(t) = \int \frac{0.4e^{-0.1t}}{\left(1+e^{-0.1t}\right)^2}dt = 0.4\int \frac{e^{-0.1t}}{\left(1+e^{-0.1t}\right)^2}dt$$

$$u = 1 + e^{-0.1t}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{e^{-0.1t}}{-0.1}$$

$$du = \frac{e^{-0.1t}}{-0.1}dt \rightarrow -0.1du = e^{-0.1t}dt$$

$$0.4\int \frac{e^{-0.1t}}{\left(1+e^{-0.1t}\right)^2}dt = 0.4\int \frac{-0.1du}{u^2} = \frac{0.4}{-0.1}\int u^{-2}du = -4\frac{u^{-1}}{-1} = \frac{4}{u} = \frac{4}{\left(1+e^{-0.1t}\right)}$$

$$a)\frac{4}{1+\frac{1}{e}} = \frac{4}{1+0.367} = \frac{4}{1.367} = 2.92$$

$$4 + 2.92 = 6.92\%$$

$$b)\frac{4}{1+\frac{1}{e^2}} = \frac{4}{1+0.135} = \frac{4}{2.132} = 1.87$$

$$4 - 1.87 = 5.87\%$$

7.El ingreso marginal de una empresa está dada por

$$I(x)' = 18 - 0.02x$$

Determinar: a) Función del Ingreso. b) Encontrar la relación de la demanda para el producto de la empresa.

Solución:

a) La función del ingreso, es el integral del ingreso marginal.

$$I(x) = \int I(x)'\,dx = \int (18 - 0.02x)dx = \int 18dx - \int 0.02x dx$$

$$I(x) = 18x - \frac{0.02x^2}{2} = 18x - 0.01x^2$$

b) Para obtener la relación de la demanda. I(x)= x*p, donde es la relación de la demanda, o precio unitario de los productos, “x” es número de unidades producidas y que se venden.

$$I(x) = x * p \Rightarrow p = \frac{I(x)}{x}$$

$$p = \frac{18x - 0.01x^2}{x} = 18 - 0.01x$$

8.La función del costo marginal de una empresa es $C(x)' = 30 + 0.05x$. Determinar

a) La función del costo C(x), si los costos fijos de la empresa son $2000 por mes.

b) ¿Cuánto costará producir 150 unidades al mes?

c) Si los artículos se venden a $55c/u. ¿Cuántos debe producir la empresa para obtener la utilidad máxima?

d) ¿Cuál será el monto de la utilidad máxima?

Solución:

$$C(x) = \int (30 + 0.05x)dx = \int 30dx + \int 0.05xdx$$

a) $$C(x) = \left[30x + \frac{0.05x^2}{2}\right] = (30x + 0.025x^2)$$

$$C(x) = 30x + 0.025x^2 + 2000$$

b) $$C(150) = 30(150) + 0.025(150)^2 + 2000$$

$$C(150) = 4500 + 5625 + 2000 = \$7062.5$$

$$U(x)' = I(x)' - C(x)'$$
$$I(x)' = x * p$$
$$I(x) \ = 55x \Rightarrow I(x)' = 55$$

c) $U(x)' = I(x)' - C(x)'$

$$55 - 30 - 0.05x \Rightarrow 25 - 0.05x \Rightarrow U(x)'' = -(MAX)$$
$$25 - 0.05x = 0$$
$$x = \frac{25}{0.05} = 500und.$$

$$U(Max) = \int U(x)'\,dx = \int (25 - 0.05x)dx = \int 25dx - \int 0.05x dx$$

d) $U(Max) = 25x - \dfrac{0.05x^2}{2} = 25x - 0.025x^2$

$$U(Max) = 25(500) - 0.025(500)^2 = 12500 - 6250 = \$6250$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

$\int 2x^3 e^{x^4+1} dx$ $\qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 25}}$ $\qquad \int \frac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}} dx$

$\int (2+y)(4y + y^2 + 8)^{\frac{1}{4}} dy$ $\qquad \int \frac{2x+3}{9-4x} dx$ $\qquad \int \frac{\ln(x-1)}{x-1} dx$

$\int x\left(e^{5x^2} - x^3 + 8\right)dx$ $\qquad \int \frac{e(5 - \ln x)}{x} dx$ $\qquad \int (4x-5)^8 dx$

$\int y^2 \sqrt[3]{y-3} dy$ $\qquad \int x\sqrt{x-2} dx$ $\qquad \int \frac{-4x}{\left(2+2x^2\right)} dx$

$\int -5x^4 \sqrt{x^5 + 2} dx$ $\qquad \int \frac{(3x^2 - 5)e^{x^3}}{e^{5x}} dx$ $\qquad \int \frac{t^3}{t+1} dt$

$\int Ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x dx$ $\qquad \int x \ln^2 x\, dx$ $\qquad \int \left(x^2 + x\right)e^{-2x+1} dx$

29. $\int x\sqrt{x+2}\,dx$ **30.** $\int x\sqrt{2x+1}\,dx$

31. $\int x^2\sqrt{1-x}\,dx$ **32.** $\int x^3\sqrt{x+2}\,dx$

33. $\int \frac{x^2-1}{\sqrt{2x-1}}\,dx$ **34.** $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x+3}}\,dx$

35. $\int \frac{-x}{(x+1)-\sqrt{x+1}}\,dx$ **36.** $\int t\sqrt[3]{t-4}\,dt$

37. $\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\,dx$ **38.** $\int (x+1)\sqrt{2-x}\,dx$

$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $\int x^3\sqrt[3]{1+x^4}\,dx$ $\int \sqrt{\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{1+x^2}}dx$

$\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ $\int 2xe^{x^2}dx$ $\int \frac{1}{x-1}\,dx$

$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $\int \sqrt{1-4y}\,dy$ $\int \frac{t^3}{t-1}dt$

$\int \frac{1}{\sqrt{4-3x}}dx$ $\int e^{2x+1}dx$ $\int x\sqrt{x+1}\,dx$

- (Costo marginal) Un industrial textil tiene un costo marginal (en dólares) por rollo de una tela particular dado por

$$C'(x) = 20xe^{0.01x^2}$$

en donde x es el número de rollos producidos de la tela. Si los costos fijos ascienden a \$3500, determinar la función del costo.

- (Costo marginal) El costo marginal (en dólares) de una compañía que fabrica zapatos está dado por

$$C'(x) = \frac{x}{1500}\sqrt{x^2 + 2400}$$

en donde x es el número de pares de zapatos producidos. Si los costos fijos son de $200, determine la función de costo.

- Durante una crisis económica reciente, el porcentaje de desempleados creció a razón de: $P'(t) = \frac{0.3e^{-0.1t}}{\left(1+e^{-0.1t}\right)^2}$

Donde “t” es el tiempo en meses. Dado que t=0 había 3% de desempleados. ¿Qué porcentaje estaba desempleado: ¿6 meses, 1 año y medio?

- El costo marginal de una finca de 8,00 hectáreas que produce banano orgánico en UROCAL está dada por la ecuación c(x) = 4 + 007x

  a) Determine la función de costo C (x), si el costo fijo de la finca es de 340 dólares mensuales.

  b) ¿Cuánto costará producir 600 cajas con banano en un mes?

  c) Si las cajas con banano se venden a 7,50 dólares cada una. ¿Cuál es su utilidad?

  d) Si las cajas con banano se venden a 7,50 dólares cada una. ¿Cuántas cajas deben producir para maximizar la utilidad?

  e) Determine el incremento de utilidad que hay maximizando la producción a 975 cajas mensualmente**.**

  f) Determine el incremento de utilidad si el volumen de venta es incrementado de 600 a 775 cajas mensuales**.**

2. Integración por Partes

Cuando el integrando está formado por un producto (o una división, qué se puede tratar como un producto) se recomienda utilizar el método de integración por partes que consiste en aplicar la siguiente fórmula:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Regla mnemotécnica**:** Un Día Vi Una Vaca MENOS Flaca Vestida De Uniforme (UDV = UV - FVDU).

Es un método simple, pero es necesario seguir unos consejos para aplicarlo correctamente.

1. **Escoger adecuadamente *u* y *dv***:

Una mala elección puede complicar más el integrando.

Por ejemplo, se tiene un producto en el que uno de sus factores es un monomio (por ejemplo, x^4). Si se considera *dv* = x^4, el integral de la expresión será v = $x^5/5$. Con lo que se ha aumentado el grado del exponente y esto puede traer problemas en el desarrollo de la integral.

Algo parecido ocurre con las fracciones (como 1/x). Si se considera *dv* = 1/x, el integral *v* = ln. |*x*|*,* seguramente, se obtendrá una integral más difícil.

Como regla general se puede determinar que "u" a las potencias y logaritmos, y expresiones que sean fáciles derivar; como "dv" a las exponenciales, fracciones y funciones trigonométricas

2. **No cambiar la elección**:

A veces se tiene que aplicar el método más de una vez para calcular la misma integral. Cuando esto ocurre, al aplicarlo por segunda vez, se tiene que llamar u al resultado du del paso anterior, y lo mismo para dv. Si no se realiza esto, como escoger una opción u otra supone integrar o derivar, se está deshaciendo el paso anterior y no se avanza en el desarrollo de la integral.

3. **Integrales cíclicas**:

En ocasiones, tras aplicar dos veces integración por partes, se tiene que despejar la propia integral de la igualdad obtenida para obtenerla como resultado. Se debe resolver como una igualdad.

Ejercicios de aplicación

1.Evaluar $\int 2xe^{2x}dx$

Solución:

No se puede resolver aplicando las fórmulas conocidas, ni por el método de sustitución, se aplica el método por partes: $\int udv = uv - \int vdu$.

$$\int 2xe^{2x}dx$$

$$u = 2x \rightarrow dv = e^{2x}dx$$

$$\frac{du}{dx} = 2 \rightarrow v = \int e^{2x}dx$$

$$du = 2dx \rightarrow v = \frac{e^{2x}}{3}$$

$$\int 2xe^{2x}dx = 2x\left(\frac{e^{2x}}{3}\right) - \int\left(\frac{e^{2x}}{3}\right)2dx = \frac{2xe^{2x}}{3} - \frac{2}{3}\int e^{2x}dx = \frac{2xe^{2x}}{3} - \frac{2e^{2x}}{6}$$

$$= \frac{4xe^{2x} - 2e^{2x}}{6} = \frac{2e^{2x}(2x-1)}{6} + C$$

2.Resolver $\int \sqrt[3]{x}\ln x dx$

Solución:

$$u = Lnx \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = x^{\frac{1}{3}}dx \Rightarrow v = \int = x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}$$

$$\int \sqrt[3]{x}\ln x dx = (Lnx)\left(\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}\right) - \int \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} * \frac{1}{x}dx = (Lnx)\left(\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}\right) - \frac{3}{4}\int x^{\frac{1}{3}}dx$$

$$\int \sqrt[3]{x}\ln x dx = (Lnx)\left(\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}\right) - \frac{9x^{\frac{4}{3}}}{16} + C$$

3.Encontrar : $\int x^2 e^{mx} dx \to (m \neq o)$

Solución:

$$\int x^2 e^{mx} dx$$

$$u = x^2 \to dv = e^{mx}dx$$

$$\frac{du}{dx} = 2x \quad \to v = \int e^{mx}dx$$

$$du = 2x\ dx \to v = \frac{e^{mx}}{m}$$

$$\int x^2 e^{mx}dx = x^2\left(\frac{e^{mx}}{m}\right) - \int \frac{e^{mx}}{m}2x\ dx = \frac{x^2 e^{mx}}{m} - \frac{2}{m}\int xe^{mx}dx$$

$$= \frac{x^2 e^{mx}}{m} - \frac{2xe^{mx}}{m^2} + \frac{2e^{mx}}{m^3} = \frac{m^2x^2e^{mx} - 2mxe^{mx} + 2e^{mx}}{m^3} + C$$

$$\int xe^{mx}dx$$

$$u = x \to v = \int e^{mv}dx$$

$$du = dx \to v = \frac{e^{mv}}{m}$$

$$= x\left(\frac{e^{mv}}{m}\right) - \int \frac{e^{mv}}{m}dx$$

$$= \frac{xe^{mx}}{m} - \frac{e^{mv}}{m^2}$$

4.Resolver el integral $\int (x-1)e^x dx$

Solución:

Se resuelve por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = x-1 \\ dv = e^x dx \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} du = dx \\ v = \int e^x dx = e^x \end{array}$$

$$\int (x-1)e^x dx = (x-1)e^x - \int e^x dx = (x-1)e^x - e^x + C$$

4.Resolver el integral $\int xLn(1+x)dx$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} u = \ln(1+x) \\ dv = xdx \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} du = \dfrac{1}{1+x}dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{1+x}dx = \frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x}dx$$

Dividiendo **x²** entre **x+1** se obtiene **x-1** de cociente y **1** de resto, por tanto,

$I = \dfrac{x^2}{2}\ln(1+x) - \dfrac{1}{2}\int (x-1+\dfrac{1}{x+1})dx$. Finalmente se obtiene

$$\int x\ln(x+1)dx = \frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x)\right) + C$$

6.Encontrat el integral $\int x^3 e^{x^2} dx$ sugerencia u= x^2

Solución:

$$\int x^3 e^{x^2} dx$$

$$u = x^2 \rightarrow dv = x^3 e dx$$

$$du = 2x dx \rightarrow v = \int x^3 e dx$$

$$du = 2x dx \rightarrow v = \frac{ex^4}{4}$$

$$\int x^3 e^{x^2} dx = x^2 \left(\frac{ex^4}{4} \right) - \int \left(\frac{ex^4}{4} \right) 2x dx = \frac{ex^6}{4} - \frac{e}{2} \int x^5 dx$$

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{ex^6}{4} - \frac{ex^6}{12} = \frac{3ex^6 - ex^6}{12} = \frac{2ex^6}{12} = \frac{ex^6}{6} + C$$

7.(Costo marginal) Una empresa tiene como costo marginal, en la producción de un producto: $C'(x) = \dfrac{6000Ln(x+20)}{(x+20)^2}$

En donde x es el nivel de producción. Determinar el costo total de producción, si los costos fijos son \$3000.

Se debe recordar que CT= CF.+CV. Cuando se integra el costo marginal, se determina los costos variables de producción

$CV. = \int C'(x)$

$CV. = \int \frac{6000Ln(x+20)}{(x+20)^2}dx = 6000\int \frac{Ln(x+20)}{(x+20)^2}dx$

$u = Ln(x+20) \rightarrow dv = \frac{dx}{(x+20)^2}$

$du = \frac{1}{x+20}dx \rightarrow v = \int \frac{dx}{(x+20)^2} = (x+20)^{-2}dx$

..........................$u = (x+20) \rightarrow du = dx$

..........................$v = \int (x+20)^{-2}dx$

..........................$v = \frac{(x+20)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x+20}$

$CV. = Ln(x+20)\left(-\frac{1}{x+20}\right) - \int -\frac{1}{x+20}\left(\frac{1}{x+20}dx\right)$

$CV. = -\frac{Ln(x+20)}{x+20} + \int \frac{dx}{(x+20)^2} = \frac{-Ln(x+20)}{x+20} - \frac{1}{x+20}$

$CV. = \frac{-Ln(x+20)-1}{x+20}$

$CT. = \frac{-Ln(x+20)-1}{x+20} + 3000$

EJERCICIOS PROPUESTOS

$I = \int xe^x dx$

$\int x^3(4-5x^3)^2 dx$

$\int x \ln \frac{1-x}{1+x}dx$

$\int \frac{x^3}{(1-x)^{10}}dx$

$\int e^{\sqrt{x}}dx$

$\int \frac{xe^x}{(x-1)^3}dx$

$\int xe^{6x-2}dx$

$\int y^4 Lny dy$

$\int (2x+4)e^{2x+4}\ dx$

$\int \frac{x}{e^x}\ dx$

$\int \frac{\ln x}{x^3}dx$

$\int x^2 Lnx\ dx$

$\int \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x dx$

$\int x^2 3^x dx$

$\int \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt[5]{x}} \ln x\, dx$

$\int (x^2 - x)e^{-3x+2}\, dx$ $\int x4^{-x}\, dx$ $\int \sqrt[5]{x^2} \ln x\, dx$

$\int xe^{x}\, dx$ $\int x^3 Lnx dx$ $\int e^{\sqrt{x}} dx$

$\int \ln(2 - x^2)dx$ $\int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[2]{x}} \ln x\, dx$ $\int \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x dx$

$\int x^3 e^{5x}\, dx$ $\int xLn(x+1)dx$ $\int x\sqrt{1+x}dx$

- Suponga que la ecuación de la demanda (p) para el producto de una empresa está dada por:

$$p = 10(x + 10)e^{-(0.1x+1)}$$

  Donde p, es el precio unitario en dólares cuando se demanda x unidades. Si el equilibrio del mercado ocurre cuando x=20 unidades. Determinar el excedente de los consumidores bajo el equilibrio del mercado.

- Reacción de una droga) La velocidad de producción de anticuerpos t horas después de inyectar un suero, está dada por:

$$K(t) = \frac{20t}{t^2 + 1} \text{ miles de anticuerpos/hora}$$

  Determinar el valor de t, en el cual K(t) es máximo y calcule el número total de anticuerpos producidos hasta ese instante.

- (Curva de aprendizaje) Después que una persona ha trabajado por *t* horas con una máquina en particular, habrá rendido *x* unidades, en donde la tasa de rendimiento
(número de unidades por hora) está dada por

$$\frac{dx}{dt} = 20\left(1 - e^{-\frac{t}{30}}\right)$$

a) ¿Cuántas unidades de rendimiento alcanzará la persona en sus primeras 30 horas?

b) ¿Cuántas unidades de rendimiento alcanzará la persona en su segunda 30 horas?

3. Integrales Por Fracciones Parciales

3.1 Factores Lineales Distintos

Se considera la integral de una función racional (cociente de dos polinomios). Sin merma de conjunto, se supone que el numerador N(x) y el denominador *D*(*x*), no tienen factor polinomio común y que el grado de *N*(*x*) es menor que el grado de *D*(*x*). (se denomina como una función racional propia), se debe realizar la factorización en el numerador y denominador, luego simplificar las expresiones y su resultado se integra.

Si el numerador N(x) es de grado mayor que el denominador (función racional impropia), se procede a dividir, si la división es exacta, su resultado se integra por cualquiera de los métodos conocidos. Si la división no es exacta, el resultado es igual al cociente, más el residuo dividido para el divisor.

Ejercicios de aplicación

1.Integrar aplicando fracciones parciales $\int \frac{2x+1}{3x^2-27}dx$

Solución:

Como el grado del numerador es menor que el denominador, no es necesario dividir, para lo cual se factoriza todo lo posible:

$$\int \frac{2x+1}{3x^2-27}dx = \int \frac{2x+1}{3(x^2-9)}dx = \frac{1}{3}\int \frac{2x+1}{x^2-9}dx = \frac{1}{3}\int \frac{2x+1}{(x+3)(x-3)}dx$$

Si expresamos como fracciones parciales, tenemos:

$$\frac{2x+1}{(x+3)(x-3)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3}$$

Al combinar términos e igualar los numeradores, resulta:

$$2x+1=A(x-3)+B(x+3)$$
$$2x+1=Ax-3A+Bx+3B=x(A+B)+3A+3B$$

Se transforma en un sistema de ecuaciones de primer grado

$$x=3\rightarrow 7=6B\rightarrow B=\frac{7}{6}$$
$$x=-3\rightarrow -5=-6A\rightarrow A=\frac{5}{6}$$

Se tiene que:

$$\int\frac{2x+1}{3x^2-27}dx=\frac{1}{3}\left[\int\frac{\frac{5}{6}}{x+3}dx+\int\frac{\frac{7}{6}}{x-3}dx\right]$$
$$\int\frac{2x+1}{3x^2-27}dx=\frac{1}{3}\left[\frac{5}{6}\int\frac{dx}{x+3}+\frac{7}{6}\int\frac{dx}{x-3}\right]$$
$$\int\frac{2x+1}{3x^2-27}dx=\frac{1}{3}\left[\frac{5}{6}Ln|x+3|+\frac{7}{6}Ln|x-3|\right]+C$$
$$\int\frac{2x+1}{3x^2-27}dx=\frac{1}{18}Ln\left|(x+3)^5(x-3)^7\right|+C$$

2.Integrar: $\int\frac{6x^4+23x^2+4x+15}{x^2+3}dx$

Solución:

Dividiendo: $\int\frac{6x^4+23x^2+4x+15}{x^2+3}dx=\int\left(6x^2+5\right)dx+\int\frac{4x}{x^2+3}dx$

Resolviendo el integral $\int\frac{4x}{x^2+3}dx$

$$\int \frac{4x}{x^2+3}dx = 4\int \frac{x}{x^2+3}dx$$
$$u = x^2+3$$
$$\frac{du}{dx} = 2x \rightarrow du = 2xdx \rightarrow \frac{du}{2} = xdx$$
$$4\int \frac{\frac{du}{2}}{u} = 4\int \frac{du}{2u} = 2\int \frac{1}{u}du = 2Ln\left|x^2+3\right|$$

Resolviendo:

$$\int \frac{6x^4+23x^2+4x+15}{x^2+3}dx = \int 6x^2dx + \int 5dx + 2Ln\left|x^2+3\right|$$
$$= 2x^3+5x+Ln\left|\left(x^2+3\right)^2\right|+C$$

3.Integrar $\int \frac{x^2+1}{x-1}dx$

Solución:

Se resuelve realizando previamente la división. Se puede realizar por Ruffini

Hecha la división se obtiene de cociente x+1 y de resto 2

$$\int \frac{x^2+1}{x-1}dx = \int \left(x+1+\frac{2}{x-1}\right)dx = \frac{x^2}{2}+x+2L\left|x-1\right|+C$$

3.2. Factores Lineales Repetidos

Si los denominadores de una fracción, alguno de estos está repetidos, entonces a cada factor $(x+b)^{z,}$ donde z es el número de veces que se repite (x+b) como factor, le corresponde la suma de z fracciones parciales

$$\frac{A}{x+b}+\frac{B}{(x+b)^2}+................+\frac{Z}{(x+b)^z}$$

Ejercicios de aplicación

1.Resolver el integral $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

Solución:

En el caso donde el denominador tiene raíces múltiples. La descomposición se tiene que hacer de la siguiente forma:

$$\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

(Si la raíz múltiple fuese de orden 3, llegaría con las fracciones hasta $\frac{D}{(x+1)^3}$

$\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}$ donde se realiza la suma indicada.

Si los numeradores son iguales, los numeradores también lo serán, por tanto,

$1=A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx.$

Para calcular los valores de A, B y C se le da a x los valores de 0, 1 y otro valor cualquiera, por ejemplo, 2.

De ese modo se obtiene A=1, B=–1 y C=1.

Entonces:

$$\int \frac{1}{x(x+1)^2}dx=\int \frac{1}{x}dx-\int \frac{1}{x+1}dx+\int \frac{1}{(x+1)^2}dx=Ln|x|-Ln|x+1|+\int (x+1)^{-2}dx=$$

$$=Ln|x|-Ln|x+1|+\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}+C=Ln|x|-Ln|x+1|-\frac{1}{x+1}+C$$

2.Resolver el integral $\int \frac{5x^2+12x+5}{(x-2)(x-1)^2}dx$ utilizando fracciones parciales

Solución:

Como el grado del numerador es menor que el denominador, no es necesario dividir. Como en el denominador se tiene factores lineales (x-2) y $(x-1)^2$, se tendrá tres fracciones parciales y tres constantes:

$$\frac{5x^2+12x+5}{(x-2)(x-1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$
$$5x^2+12x+5=A(x-1)^2+B(x-2)(x+1)+C(x-2)$$
$$5x^2+12x+5=x^2(A+B)+x(-2A-B+C)+A-2B-2C$$

Se transforman en tres ecuaciones lineales con tres incógnitas

$$5x^2+12x+5=A(x^2-2x+1)+B(x^2-x-2)+C(x-2)$$
$$A+B=5$$
$$-2A-B+C=12$$
$$A-2B-2C=5$$
$$A=-\frac{29}{3}\rightarrow B=\frac{44}{3}\rightarrow C=58$$

Por tanto:

$$\int\frac{5x^2+12x+5}{(x-2)(x-1)^2}dx=\frac{-\frac{29}{3}}{x-2}+\frac{\frac{44}{3}}{x-1}+\frac{58}{(x-1)^2}$$
$$\int\frac{5x^2+12x+5}{(x-2)(x-1)^2}dx=-\frac{29}{3}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{44}{3}\int\frac{dx}{x-1}+58\int\frac{dx}{(x-1)^2}$$
$$\int\frac{5x^2+12x+5}{(x-2)(x-1)^2}dx=-\frac{29}{3}Ln|x-2|+\frac{44}{3}Ln|x-1|+\frac{58}{x-1}+C$$

3.3 Factores Cuadráticos Irreducibles Distintos

Si en el denominador de tiene un factor cuadrático como x^2+bx+c, no se pueden expresar como factores lineales con coeficientes reales, denominándose como

factor cuadrático irreducible en los números reales. A cada factor cuadrático le corresponderá una fracción parcial de la forma:

$$\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}$$

Ejercicios de aplicación

1.Resolver la integral:

$$\frac{4x^3-x^2+15x-29}{2x^3-x^2+8x-4}$$

Solución:

Primero se observa que el grado del numerador y denominador son iguales por lo que tiene que realizar una división larga.

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2 \\ \hline 2x^3-x^2+8x-4 & \quad \cancel{4x^3}-x^2+15x-29 \\ & \cancel{-4x^3}+2x^2-16x+8 \\ \hline & \quad\quad x^2-x-21 \end{array}$$

$$\frac{4x^3-x^2+15x-29}{2x^3-x^2+8x-4}=2+\frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}$$

Se factoriza el denominador:

$$2x^3-x^2+8x-4=x^2(2x-1)+4(2x-1)=(x^2+4)(2x-1)$$

x^2+4 es un término cuadrático irreducible es por lo que ahora se trabaja así:

$$\frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{C}{2x-1}$$

Operamos el mínimo común denominador

Multiplicar las letras en los paréntesis

$x^2 - x - 21 = (Ax + B)(2x - 1) + C(x^2 + 4)$

$x^2 - x - 21 = 2Ax^2 - Ax + 2Bx - B + Cx^2 + 4C$ **Eliminar los paréntesis**

$x^2 - x - 21 = 2Ax^2 + Cx^2 - Ax + 2Bx - B + 4C$ **Ordenar**

$x^2 - x - 21 = x^2(2A + C) + x(-A + 2B) + (-B + 4C)$ **Factorizar**

Formar las ecuaciones:

$2A + C = 1$

$-A + 2B = -1$

$-B + 4C = -21$

Se puede resolver por cualquier método, en este caso se practicará la resolución por matices

$$\left.\begin{array}{ccc|c} +2 & +0 & 1 & +1 \\ -1 & +2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -21 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} +1 & -2 & 0 & +1 \\ +0 & -1 & 4 & -21 \\ +2 & +0 & 1 & +1 \end{array}\right. \qquad -R_1 = R_1$$

$$-2R_1 + R_3 = R_3$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} +1 & -2 & 0 & +1 \\ +0 & -1 & 4 & -21 \\ +0 & +4 & 1 & -1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{cccc} -2 & +4 & 0 & -2 \\ +2 & +0 & 1 & +1 \\ \hline +0 & +4 & 1 & -1 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} +1 & -2 & 0 & +1 \\ +0 & -1 & 4 & -21 \\ +0 & +0 & 17 & -85 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{4R_2 + R_3 = R_3} \\ 0 & -4 & 16 & -84 \\ 0 & +4 & +1 & -1 \\ \hline 0 & +0 & 17 & -85 \end{array}$$

$$17C=-85 \qquad -B+4C=-21 \qquad A-2B=1$$
$$C=-5 \qquad -B=-21+20 \qquad A=1+2B$$
$$B=1 \qquad A=1+2$$
$$A=3$$

Respuesta:

$$\frac{4x^3-x^2+15x-29}{2x^3-x^2+8x-4}=2+\frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}=2+\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{C}{2x-1}=2+\frac{3x+1}{x^2+4}+\frac{-5}{2x-1}$$

2.Integrar $\int\frac{5x^2+3x-1}{x^3-2x^2+x-2}$

Solución:

Factorizando el denominador:

$$x^3-2x^2+x-2=\left(x^3-2x^2\right)+\left(x-2\right)=x^2\left(x-2\right)+\left(x-2\right)=\left(x^2+1\right)\left(x-2\right)$$

$$\frac{5x^2+3x-1}{x^3-2x^2+x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$
$$\frac{5x^2+3x-1}{x^3-2x^2+x-2}=\frac{A\left(x^2+1\right)+\left(Bx+C\right)\left(x+2\right)}{\left(x-2\right)\left(x^2+1\right)}$$

$$5x^2+3x-1=Ax^2+A+Bx^2-2Bx+Cx-2C$$
$$5x^2+3x-1=x^2\left(A+B\right)+x\left(C-2B\right)+A-2C$$
$$A+B=5$$
$$-2B+C=3$$
$$A-2C=-1$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones de primer grado, se obtiene: A=5; B=0; C=3

$$\int \frac{5x^2+3x-1}{x^3-2x^2+x-2}dx = \int \frac{5}{x-2}dx + \int \frac{3}{x^2+1}dx$$
$$\int \frac{5x^2+3x-1}{x^3-2x^2+x-2}dx = 5\int \frac{dx}{x-2} + 3\int \frac{dx}{x^2+1}$$
$$\int \frac{5x^2+3x-1}{x^3-2x^2+x-2}dx = 5Ln|x-2| + 3Tan^{-1}x$$
$$\int \frac{5x^2+3x-1}{x^3-2x^2+x-2}dx = Ln\left|(x-2)^5\right| + 3Arc.Tanx + C$$

3.4 Factores Cuadráticos Irreducibles Repetidos.

Cuando en el denominador contiene factores de la forma $(x^2+bx+c)^n$, donde n es el valor de veces que se repite el valor irreducible. A cada factor le corresponde la suma de n fracciones parciales, tales como:

$$\frac{A+Bx}{x^2+bx+c} + \frac{C+Dx}{(x^2+bx+c)^2} + ... + \frac{M+Nx}{(x^2+bx+c)^n}$$

Ejercicios de aplicación

1. Determinar $\int \frac{x^5}{(x^2+4)^2}dx$ usando fracciones parciales

Solución:

Se resuelve el cuadrado del binomio $(x^2+4)^2 = x^4+8x^2+16$ y se realiza la división porque el numerador tiene mayor exponente que el denominador

$$\frac{x^5}{x^4+8x^2+16} = x - \frac{8x^3+16}{x^4+8x^2+16} = x - \frac{8x^3+16x}{(x^2+4)^2}$$

La expresión $\dfrac{8x^3+16x}{\left(x^2+4\right)^2}$ el denominador tiene un factor cuadrático irreductible, correspondiendo a dos fracciones parciales y tiene **cuatro** coeficientes, realizando:

$$\frac{8x^3+16x}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+4\right)^2}$$

$$8x^3+16x=(Ax+B)(x^2+4)+Cx+D$$

$$8x^3+16x=Ax^3+4Ax+Bx^2+4B+Cx+D$$

$$8x^3+0x^2+16x+0=Ax^3+Bx^2+x\left(4A+C\right)+4B+D$$

$$A=8\rightarrow B=0$$

$$4A+C=16\rightarrow C=-16$$

$$4B+D=0\rightarrow D=0$$

$$\int\frac{x^5}{\left(x^2+4\right)^2}dx=\int xdx-\left[\int\frac{8x}{x^2+4}dx-\frac{16x}{\left(x^2+4\right)^2}dx\right]$$

$$\int\frac{x^5}{\left(x^2+4\right)^2}dx=\frac{x^2}{2}-4\int\frac{2x}{x^2+4}dx+8\int\frac{2x}{\left(x^2+4\right)^2}dx$$

Las integrales: $\int\frac{2x}{x^2+4}dx$; $\int\frac{2x}{\left(x^2+4\right)^2}dx$ se puede resolver por medio del método de sustitución.

$$\int\frac{x^5}{\left(x^2+4\right)^2}dx=\frac{x^2}{4}-4Ln\left(x^2+4\right)-\frac{8}{x^2+4}+C$$

2.Resolver $\int\frac{x^3+x^2+x+1}{\left(x^2+x-1\right)^2}dx$

Solución:

El denominador tiene un factor cuadrático irreductible, correspondiendo a dos fracciones parciales y tiene **cuatro** coeficientes, realizando:

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{(x^2+x-1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+x-1}+\frac{Cx+D}{(x^2+x-1)^2}$$
$$x^3+x^2+x+1=(Ax+B)(x^2+x-1)+Cx+D$$
$$x^3+x^2+x+1=Ax^3+Ax^2-Ax+Bx^2+Bx-B+Cx+D$$
$$x^3+x^2+x+1=Ax^3+x^2(A+B)+x(-A+B+C)-B+D$$
$$A=1$$
$$A+B=1\rightarrow B=0$$
$$-A+B+C=1\rightarrow C=2$$
$$-B+D=1\rightarrow D=1$$
$$\int\frac{x^3+x^2+x+1}{(x^2+x-1)^2}dx=\frac{x}{x^2+x-1}+\frac{2x+1}{(x^2+x-1)^2}$$
$$\int\frac{x^3+x^2+x+1}{(x^2+x-1)^2}dx=\int\frac{x}{x^2+x-1}dx+\int\frac{2x+1}{(x^2+x-1)^2}dx$$
$$\int\frac{x^3+x^2+x+1}{(x^2+x-1)^2}dx=\frac{\operatorname{arctan}h\left(\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{5}}+\frac{1}{2}Ln\left|5-4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right|+\frac{1}{x^2+x-1}+C$$

El integral $\int\frac{2x+1}{(x^2+x-1)^2}dx$ se puede resolver por medio de sustitución

$$\int\frac{2x+1}{(x^2+x-1)^2}dx=\frac{1}{x^2+x-1}$$

El integral $\int\frac{x}{x^2+x-1}dx$ es un proceso más complejo, se resuelve de la siguiente manera:

completar el cuadrado del denominador $x^2+x-1:\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$

$$\int\frac{x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}dx$$

Aplicando el método de sustitución:

$$u=\left(x+\frac{1}{2}\right)\rightarrow du=dx$$

$$=\int\frac{u-\frac{1}{2}}{u^2-\frac{5}{4}}du=\int\frac{2-4u}{5-4u^2}du$$

Para $bx^2 \pm a$ sustituir $x=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}u$

Aplicando integración por sustitución

$$u=\frac{\sqrt{5}}{2}v\rightarrow du=\frac{\sqrt{5}}{2}dv$$

$$=\int\frac{\sqrt{5}-5v}{5-5v^2}dv=\int\frac{\sqrt{5}}{5-5v^2}dv-\int\frac{5v}{5-5v^2}dv$$

$$\int\frac{\sqrt{5}}{5-5v^2}dv=\frac{\operatorname{arctan}h(v)}{\sqrt{5}}$$

$$\int\frac{5v}{5-5v^2}dv=-\frac{1}{2}Ln\left|5-5v^2\right|$$

Sustituir en la ecuación $v=\frac{2}{\sqrt{5}}u\rightarrow u=\left(x+\frac{1}{2}\right)$

$$=\frac{\operatorname{arctan}h\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{5}}-\left(-\frac{1}{2}Ln\left|5-5\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2\right|\right)$$

$$=\frac{\operatorname{arctan}h\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{5}}+\frac{1}{2}Ln\left|5-4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right|$$

Agregando la constante, se tiene:

$$= \frac{\operatorname{arctan} h\left(\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} Ln\left|5-4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right|$$

3. Evaluar la siguiente integral (Zill, 1987. Ejemplo 6)

$$\int \frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)}\,dx$$

Se escribe en fracciones parciales:

$$\frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3}$$

Resolviendo las operaciones se obtiene:

$$4x = (Ax+B)(x^2+2x+3) + (Cx+D)(x^2+1)$$

$$4x = (A+C)x^3 + (2A+B+D)x^2 + (3A+2B+C)x + (3B+D)$$

Como el denominador del integrando no tiene raíces reales, se comparan los coeficientes de las potencias de x:

A+C=0

2A+B+D=0

3A+2B+C=4

3B+D=0

Resolviendo las ecuaciones se obtiene:

A= 1, B=1, C=-1 y D=-3 que se sustituyen en la integral:

$$\int \frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)}dx = \int \left[\frac{x+1}{x^2+1} - \frac{x+3}{(x^2+2x+3)}\right]dx$$

Resolviendo por sustitución de u y por sustitución trigonométrica la solución es:

$$\int \frac{4x}{(x^2+1)(x^2+2x+3)}dx = \frac{1}{2}ln\frac{x^2+1}{x^2+2x+3} + \tan^{-1}x - \sqrt{2}\tan^{-1}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

Ejercicios propuestos

$\int \frac{4x^3+2x-1}{2x+1}dx$ $\quad$ $\int \frac{x^2+x+1}{x^3-x^2-x+1}dx$ $\quad$ $\int \frac{3x^2+1}{x^4-1}dx$

$\int \frac{1}{(x-3)^2(x^2+3)}dx$ $\quad$ $\int \frac{-x^2+x-1}{2-x}dx$ $\quad$ $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3}dx$

$\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx$ $\quad$ $\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$

$\int \frac{x-29}{(x-4)(x+1)}dx$

$\int \frac{37-11}{(x+1)(x^2-5x+6)}dx$ $\quad$ $\int \frac{5x-12}{x^2-4x}dx$ $\quad$ $\int \frac{5x-12}{x^2-4x}dx$

$\int \frac{2x+3}{(x-1)^2}dx$ $\quad$ $\int \frac{5x^2-4}{x^2(x+2)}dx$

$\int \frac{x^2-6}{(x+2)(2x-1)}dx$

$\int \frac{x^2+10x-36}{x(x-3)^2}dx$ $\quad$ $\int \frac{x^2+19x+20}{x(x+2)(x-5)}dx$

$\int \frac{19x^2+50x-25}{3x^3-5x^2}dx$

$\int \frac{2x^2+x}{(x-1)^2(x+1)^2}dx$ $\quad$ $\int \frac{5x^2-2}{x^2-x}dx$ $\quad$ $\int \frac{3x^3+x}{(x^2+1)^2}dx$

$\int \frac{10+x}{x^2+10x+25}dx$ $\quad$ $\int \frac{2x-2}{x^2+7x+12}dx$ $\quad$ $\int \frac{4x-5}{x^2+2x+1}dx$

$\int \frac{(x+1)}{x^3+x^2-5x}dx$

- **Excedente de los consumidores**

La ecuación de demanda para el producto de un fabricante está dada por:

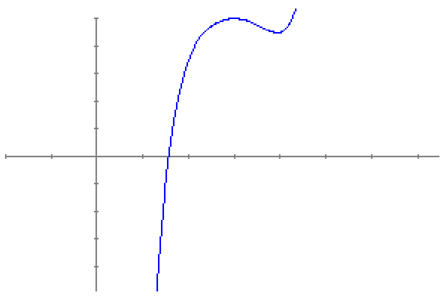
$$p = \frac{300(x+3)}{x^2+7x+6}$$

donde *p* es el precio por unidad (en dólares) cuando se demandan x unidades. Suponiendo que el equilibrio de mercado ocurre en el punto (x, p) = (10, 325/ 22). Determine
el excedente de los consumidores bajo equilibrio de mercado.

UNIDAD 4. INTEGRAL DEFINIDA

1. Concepto.

El concepto de integral definida nace al intentar calcular el área encerrada bajo una función continua, es decir, el objetivo principal es calcular el área encerrada entre el eje "X", dos rectas paralelas al eje "Y" x = a y x = b, y la función continua:



Fuente: Elaboración propia

Definición: Sea f(x) es una función continua, con una antiderivada F(x). Si a, y b son números reales, en donde la función y la antiderivada existen para todos los valores de x en el intervalo en [a,b]. La integral definida de la f(x), se define como:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad .$$

A los números a y b, se denominan como **límites de integración,** "a" es el **límite inferior** y "b" es el **límite superior.** Por lo regular a<b.

Cuando se evalúa una integral definida se debe utilizar corchetes y se omite la constante de integración de la antiderivada, porque esta se cancela en la respuesta final.

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Ejemplos de aplicación:

Evaluar las siguientes integrales definidas:

a) $\int_a^b x^8 dx$ b) $\int_2^5 \frac{2}{x} dx$ c) $\int_1^3 2e^{5x} dx$ d) $\int_0^1 \frac{2x^2 - 5}{x} dx$

Solución:

a) La integral de $\int x^8 dx = \frac{x^9}{9}$ entonces:

$$\int_a^b x^8 dx = \left[\frac{x^9}{9}\right]_a^b = \frac{b^9}{9} - \frac{a^9}{9} = \frac{1}{9}\left(b^9 - a^9\right)$$

b) La integral de $\int \frac{2}{x} dx = 2Ln|x|$ luego:

$$\int_2^5 \frac{2}{x} dx = \left[2Ln|x|\right]_2^5 = 2Ln|5| - 2Ln|2| = 2(1.609) - 2(0.693) = 3.218 - 1.386 = 1.832$$

c) La integral de $\int 2e^{5x} dx = \frac{2e^{5x}}{5}$ entonces:

$$\int_1^3 2e^{5x} dx = \left[\frac{2e^{5x}}{5}\right]_1^3 = \frac{2e^{15}}{5} - \frac{2e^5}{5} = \frac{6,538,034.745}{5} - \frac{296.8263182}{5} = 1,307,606.949 - 59.36526364$$
$$= 1,307,547.584$$

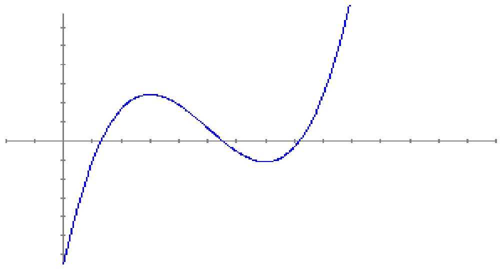
d) La integral de $\int \frac{2x^2 - 5}{x} dx = x^2 - 5Ln|x|$ luego:

$$\int_0^1 \frac{2x^2 - 5}{x} dx = \left[x^2 - 5Ln|x|\right]_0^1 = \left(1 - 5Ln|1|\right) - \left(0 - 5Ln|0|\right) = 1$$

2. Propiedades De La Integral Definida

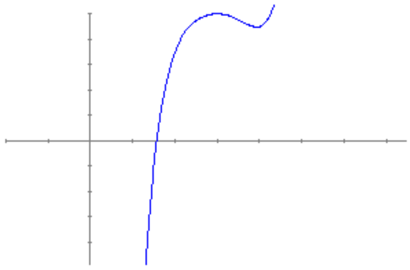
Dada una función integrable f en [a, b], entonces:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$ cualquiera que sea f. Está claro que su valor es 0 ya que no existe un espacio del que se pueda calcular un área.



Fuente: Elaboración propia

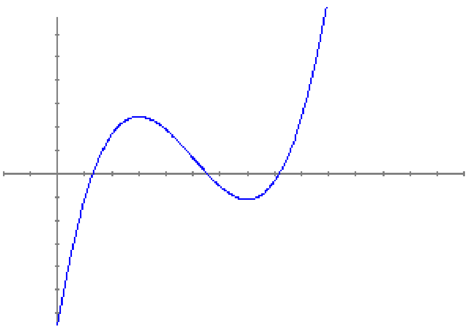
- Si f(x) ≥ 0 y continua en [a,b], entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ (si la función es positiva, el valor de la integral también lo será. Por tanto, cuando la función sea negativa, la integral será también negativa.



Fuente: Elaboración propia

2. Si a < b < c y f es continua en [a,c], entonces : $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

3. Las propiedades 2 y 3 dan la clave para calcular el área bajo una función que cambia de signo en el intervalo dónde se está calculando, así por ejemplo si calculamos directamente $\int_2^9 f(x)dx$ obtendremos 5-3+1 = 3 u^2 lo cuál es falso ya que el área correspondiente a la parte negativa también se debe sumar y no restar. Para evitar esto debemos calcular la integral en cada uno de los intervalos de forma que la función sea siempre positiva o siempre negativa y cambiar de signo a la que le corresponde la parte negativa: Área $= \int_2^5 f(x)dx - \int_5^8 f(x)dx$ $\int_8^9 f(x)dx =$ 5+3+1=9 u^2.



4. $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) + g(x))dx$

Fuente: Elaboración propia

5. $K\cdot\int_a^b f(x)dx = \int_a^b K\bullet f(x)dx$ Para K un número real cualquiera.

6. Si para cada x $\in$ [a,b] se cumple que f(x) $\leq$ g(x), entonces $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

7. Si f es una función continua en [a,b], entonces existe c $\in$ [a,b] tal que:

$\int_a^b f(x)dx =$ f(c) (b-a) **(Teorema del valor medio del cálculo integral)**

3. Teorema Fundamental Del Cálculo Integral

Si f es una función continua no negativa en [a,b], donde a≤x≤b, y F(x) la antiderivada de f(x). El área (A) entre y=f(x), el eje x, y las líneas verticales x=a y x=b, será igual a la integral definida:

A = $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ **Regla de Barrow**

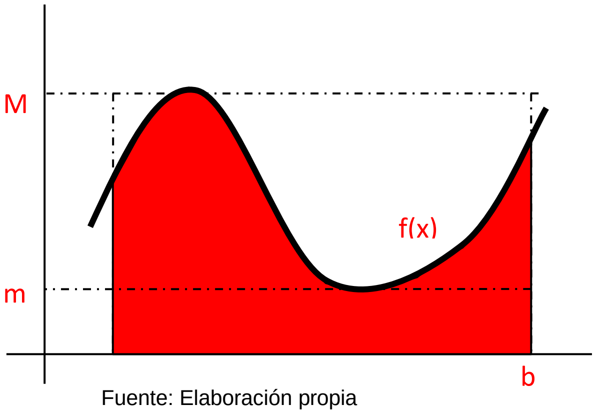
3.1Teorema Del Valor Medio Del Cálculo Integral:

Si f es continua en [a, b], entonces existe c$\in$[a, b] tal que: $\int_a^b f(x)dx$ = f(c)·(b – a)

Demostración:

Si f(x) es continua entonces alcanza un valor máximo M y uno mínimo m en [a, b] luego el área de la función estará comprendida entre la del rectángulo pequeño, de altura m y área m·(b-a), y el área del rectángulo grande, de altura M y área M(b-a), es decir:

m(b-a) $\leq \int_a^b f(x)dx \leq$M(b-a) ,



Fuente: Elaboración propia

dividiendo entre (b-a) queda:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$$

Como la función f(x) es continua, toma todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo, ya que se debe cumplir el teorema de Darboux es decir, $\forall k \in [m,M]$, $\exists c \in [a, b]$ tal que f(c)=k

Concretamente si k= $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ (que es un valor comprendido entre m y M) entonces,

$\exists c \in [a, b]$ tal que f(c)= $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ o equivalentemente, $\exists c \in [a, b]$ tal $\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$

Ejercicios propuestos

$\int_0^1 (3x-5)dx$ $\int_2^5 \frac{6-x}{x^3}dx$ $\int_1^4 3\sqrt{x-1}dx$ $\int_0^a \left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2 dx$

$\int_{-2}^0 (x-3)(x+5)dx$ $\int_0^3 \left(1+2\sqrt{x}\right)^2 dx$ $\int_0^1 (3a+1)^4 da$ $\int_1^e Lnxdx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-3x^2+x-2\right)dx$ $\int_{-2}^1 \left(\frac{1}{3}t+2\right)^2 dt$ $\int_{-3}^0 \frac{dx}{8+4x}dx$ $\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}dx$

$\int_0^1 e^{3t}dt$ $\int_2^5 \frac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\sqrt{x}}dx$ $\int_0^2 \frac{e^{4x}+e^{5x}}{e^{2x}}dx$ $\int_0^4 \left(u^3+2u^2-3u+2\right)du$

Dada la función $f(x)=2x^2-3x$, calcula: **a)** $\int_0^6 f(x)$ **b)** $\int_{-1}^0 f(x)$

(Cambio en el ingreso) La función de ingreso marginal de una empresa está dada por $I'(x)=15-0.03x$. Determine el incremento en el ingreso total de la empresa cuando el nivel de ventas se incrementa de 150 a 250 unidades.

- (Incremento en las utilidades) El costo marginal de cierta empresa está dado por, $C'(x)=18-0.003x$ y el ingreso marginal es $I'(x)=23-0.006x$. Determine el incremento en las utilidades de la empresa si las ventas se incrementan de 600 a 700 unidades.

  - El costo promedio de reparar cierto automóvil el t años es $8(4+t+0.5t^2)$ dólares al año, determinar cuánto será el costo total en reparación en los 3 primeros años y en el periodo t = 4, t = 5 años.

  - Dada la funcion f(x)=2x^2-3x, calcular: a) $\int_0^6 f(x)$ b) $\int_{-1}^0 f(x)$

  - Calcular $\int_0^2 fx(dx)$ $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } 0\le x<1 \\ 2 & \text{si } 1\le x\le 2 \end{cases}$

4. Calculo De Áreas Planas

En la integral definida una de las ventajas de la aplicación de regla de Barrow, es el cálculo de áreas. Para ello solo hace falta saber calcular una primitiva y hacer una pequeña sustitución. Se aplicará los siguientes casos:

- Que el área a calcular sea positiva (por encima del eje X)
- Que el área a calcular sea negativa (por debajo del eje X)
- Que haya una parte positiva y otra negativa
- Que el área a calcular está limitada por el eje Y en lugar de por el eje X
- Área encerrada entre dos curvas

Ejemplos

Solución:

1. Calcular el Área $\int_{1}^{3} (x^2 + x)dx$:

1. Se determina una primitiva de f(x) : $\int (x^2 + x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$

2. Calcular el área A= $\int_{1}^{3} (x^2 + x)dx = \left|\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right|_{1}^{3} = \left|\frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2}\right| - \left|\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2}\right| = 13.5 - 08 = 12.7U^2$

2.Calcular la integral $\int_{-1}^{2} xe^{2x}dx$

Solución:

1. Determinar la primitiva de la función específica

$$\int_{-1}^{2} xe^{2x}dx$$
$$u = x \to dv = e^{2x}dx$$
$$du = dx \to v = \frac{e^{2x}}{2}$$
$$\int_{-1}^{2} xe^{2x}dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} = \frac{2xe^{2x} - e^{2x}}{4} = \frac{e^{2x}(2x-1)}{4}$$

2.Aplicar la regla de Barrow

$$\int_{-1}^{2} xe^{2x}dx = \left[\frac{e^{2x}(2x-1)}{4}\right]_{-1}^{2} = \left[\frac{e^{-2}(-2-1)}{4}\right] - \left[\frac{e^{4}(4-1)}{4}\right] = -0.12101501 - 40.9486 = -41.0696275$$

3.Calcular la integral $\int_{2}^{3} \frac{x}{x^2 - 1}dx$

Solución:

$$\frac{x}{x^2-1}=\frac{x}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$x=A(x+1)+B(x-1)$$

$$\text{Para x = -1, } B=\frac{1}{2}$$

$$\text{Para x = 1, A} = \frac{1}{2}$$

$$\int\frac{x}{x^2-1}dx=\int\frac{\frac{1}{2}}{x-1}dx+\int\frac{\frac{1}{2}}{x+1}dx=\frac{1}{2}Ln|x-1|+\frac{1}{2}Ln|x+1|=$$

$$=Ln(\sqrt{x-1}.\sqrt{x+1})$$

Por tanto,

$$\int\frac{x}{x^2-1}dx=\left[Ln(\sqrt{x-1}\sqrt{x+1})\right]_2^3=Ln\sqrt{8}-Ln\sqrt{3}=1.039720-0.549306=0.490414$$

4. La definición de costo marginal de un fabricante es $\frac{dc}{dx}=0.4x+3$ Si la producción actual es $x=70$ unidades a la semana. ¿Cuánto más costará incrementar la producción a 120 unidades por semana?

Solución:

$$C(120)-C(70)=\int_{70}^{120}(0.4x+3)dx=\int_{70}^{120}0.4x\,dx+\int_{70}^{120}3dx$$

$$=\left[\frac{0.4x^2}{2}+3x\right]_{70}^{120}=\left[\frac{0.4(120)^2}{2}+3(120)\right]-\left[\frac{0.4(70)^2}{2}+3(70)\right]$$

$$=(2880+360)-(980+210)=3240-1190=\$2050$$

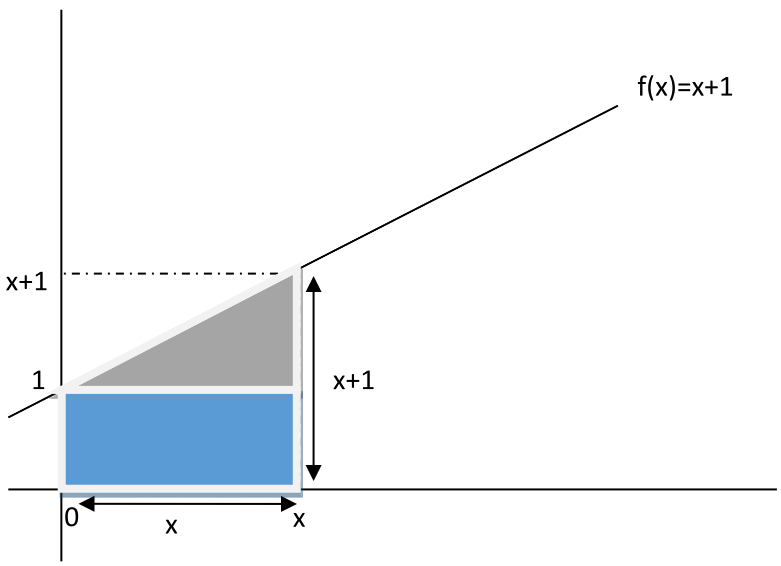
4.1 Función De Área Asociada

Si se tiene la función f, determinada en [a, b], se denomina **Función de Área Asociada a f(x)** a la función F(x) = $\int_a^x f(x)dx$, $\forall$ x $\in$ [a, b]. Esta función determina el área encerrado por la función f(x) entre a y x.

Ejemplo

1.¿Cuál es F(x), la función área asociada a f(x)=x+1 en el intervalo $[0,2]$?

Como la función F(x) representa un área encerrada por f(x)=x+1, se realiza el gráfico siguiente:



Fuente: Elaboración propia

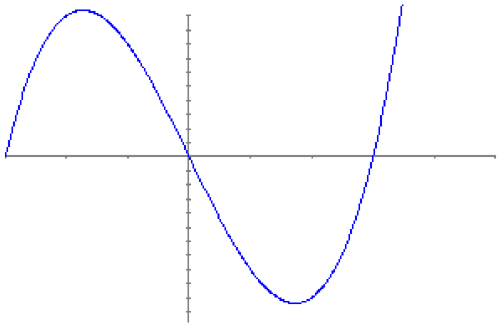
Se puede comprobar que el área comprendida entre a y x por la función f(x)=x+1, es igual:

Área del rectángulo=x

Área del triángulo=$\frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}$

Se saca como conclusión que el área asociada de la función f(x)= x+1, es $F(x) = \frac{x^2}{2} + x$

2.Determinar el área comprendida entre los límites (-2 y 3)



Fuente: Elaboración propia

Solución:

Se calcula: $\int_{-2}^{3}(x^3-9x)dx$ Si se aplica directamente la regla de Barrow, se obtiene un resultado erróneo ya que no se ha comprobado si existen tramos negativos de la función en el intervalo (-2, 3) .

Para calcular el área pedida se debe seguir los siguientes pasos:

1. Resolver la ecuación x^3-9x = 0 para calcular dónde corta al eje X. El resultado son los puntos -3, 0 y 3.
2. Seleccionar las raíces afectadas en el problema , que son las que pertenezcan al intervalo [-2,3] : en nuestro caso 0 y 3.
3. Descomponer el Área = $|\int_{-2}^{0}(x^3-9x)dx| + |\int_{0}^{3}(x^3-9x)dx|$
4. Calcular la primitiva de x^3- 9x: G(x) = x^4/4-9x^2/2.
5. Calcular cada una de las integrales definidas $\int_{-2}^{0}(x^3-9x)dx$ = 0 -(4- 18) =14 u^2 y

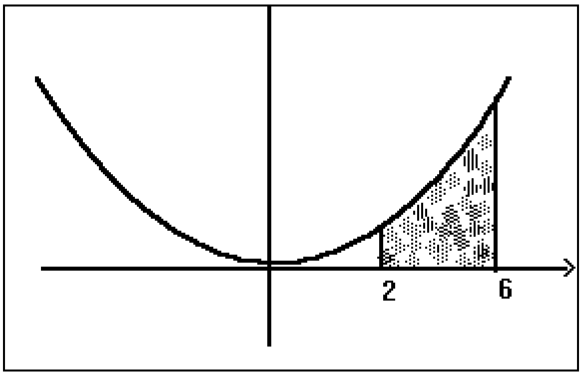
$\int_{0}^{3}(x^3-9x)dx$ = 81/4 - 81/2 -0 = -81/4 donde se concluye que el área buscada es 14 + 81/4 = 137/4 u^2

3.Calcular el área del espacio comprendida por la paraba y=x^2 y las rectas y=0; x=2; x=6

Solución:

La recta **y=0** es el eje **x.**

El área del espacio limitado por una función **f(x),** el eje **x** y la rectas **x=a, x=b,** viene dada por el valor absoluto de la integral $I=\int_a^b f(x)dx$ siempre que la función **f(x)** no corte al eje **x** en ningún punto interior del intervalo [a,b]



$I=\int_2^6 x^2dx=$

$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^6=\frac{6^3}{3}-\frac{2^3}{3}=\frac{208}{3}$

Área= $\left|\frac{208}{3}\right| = \frac{208}{3}$ u^2

Fuente: Elaboración propia

4.Calcular el área del espacio comprendida por la curva y=x^3-6x^2+8x y el eje "x"

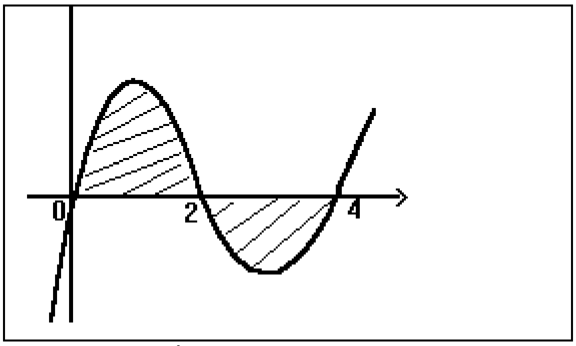
Solución:

Calculamos los puntos de corte de la curva con el eje **x:**

$x^3-6x^2+8x=0$

$$(x^2-6x+8)x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2-6x+8=0 \Rightarrow x=2; x=4 \end{cases}$$

Los puntos de corte obtenidos son **0**, **2** y **4**, por tanto, el área pedida se halla resolviendo las integrales:



I$_1$= $\int_0^2 (x^3-6x^2+8x)dx$

I$_2$= $\int_2^4 (x^3-6x^2+8x)dx$

I$_1$= $\left[\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2\right]_0^2=4$;

Fuente: Elaboración propia

$I_2=\left[\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2\right]_2^4=-4$;

Área= |4 |+ |-4 |=8 u^2

5.Calcular el área comprendida por la parábola y= 9-x^2 con el eje de las abscisas

Solución

Determinamos los puntos de corte de la curva con el eje **x:**

9-x^2=0   x=3; x=-3

$$I=\int_{-3}^{3}(9-x^2)dx=\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3}=(27-9)-(-27+9)=36$$

Área =36 U^2

6. El ingreso marginal de una empresa está determinada por $I'(x)=12.5+0.02x$. Determinar el incremento del ingreso total, cuando los niveles de ventas se amplían de 200 a 300 unidades.

$$I(x)=\int I'(x)$$

$$I(x)=\int_{200}^{300}(12.5+0.02x)dx=\int_{200}^{300}12.5dx+\int_{200}^{300}0.02xdx=\left[12.5x+\frac{0.02x^2}{2}\right]_{200}^{300}$$

$$I(x)=\left[12.5x+0.01x^2\right]_{200}^{300}=\left[12.5(300)+0.01(300)^2\right]-\left[12.5(200)+0.01(200)^2\right]$$

$$I(x)=(3750+900)-(2500+400)=4650-2900=\$1750$$

7. Calcular la integral $\int_{2}^{3}\frac{x}{x^2-1}dx$

Solución:

$$\frac{x}{x^2-1}=\frac{x}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$x=A(x+1)+B(x-1)$$

Para x = -1, $B=\frac{1}{2}$

Para $x = 1,\ A = \frac{1}{2}$

$$\int \frac{x}{x^2-1}dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1}dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x+1}dx = \frac{1}{2}Ln|x-1| + \frac{1}{2}Ln|x+1| =$$

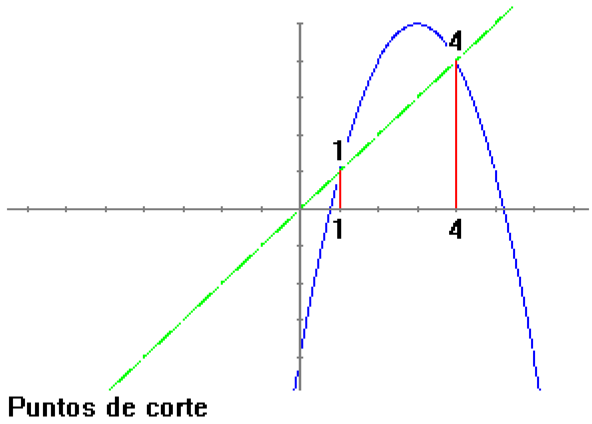
$$= Ln(\sqrt{x-1}.\sqrt{x+1})$$

Por tanto,

$$\int \frac{x}{x^2-1}dx = \left[Ln(\sqrt{x-1}\sqrt{x+1})\right]_2^3 = Ln\sqrt{8} - Ln\sqrt{3} = 1.0397 - 0.5493 = 0.4904$$

5. Área De Regiones Entre Curvas

El área comprendida entre dos curvas f y g es igual al área de f menos el área de g entre los puntos de corte de f y g.



Fuente: Elaboración propia

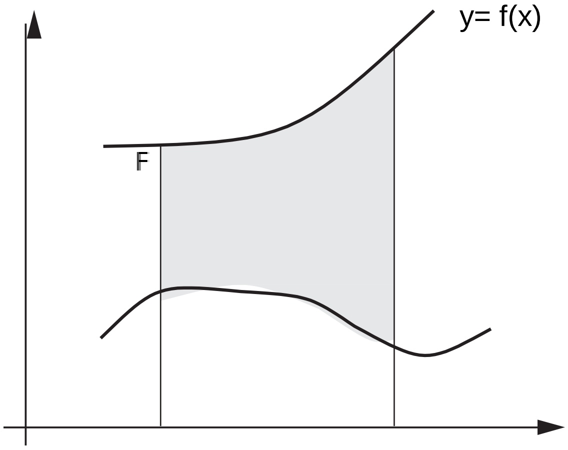
En el dibujo se evidencia f(x) = $-x^2 +6x -4$ y g(x) = x. Por lo que se calcula los puntos de corte y resultan x =1 y x = 4, también se calcula f(x)-g(x) = $-x^2 +5x -4$ y el área comprendida entre 1, 4 bajo f-g:

Resolvemos $-x^2 +5x -4=0$ y resulta 1 y 4 que coinciden con los extremos de la integral definida.

Calculamos

$$\int_1^4 \left[-x^2 + 5x - 5\right])dx = \left|\frac{-x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 5x\ \right]_1^4\Big| = \left|\frac{-64}{3} + 40 - 20 - (\frac{-1}{3} + \frac{5}{2} - 5)\right| = \frac{3}{2}u^2$$

Cuando se desea determinar el área comprendida por las funciones f(x) y g(x) y las líneas x=a x=b



Fuente: Elaboración propia

Se establece por ejemplo que f(x)> $g(x) \geq 0$ en $a \leq x \leq b$ de manera que ambas curvas estén sobre el eje x, y que la función f(x) este sobre g(x). el área escogida en la figura CDEF, comprendida entre las dos curvas, será igual al área ABEF, menos el área ABDC.

El área requerida está dada por

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

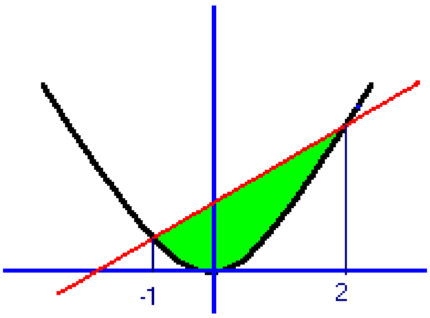
$$\int_a^b (y_{\sup} - y_{\inf.})dx$$

Ejemplos de aplicación

1.Calcular el área comprendida por la parábola y=x^2 y la recta de la ecuación y=x+2

Solución:

Al representar las funciones, la recta y=x+2 está por encima de la parábola y=x^2



Fuente: Elaboración propia

Se calculan los límites de integración. Éstos son los puntos de corte de la parábola y la recta. Para ello, igualemos ambas funciones y resolvamos:

$$x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \qquad x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Por otra parte, la función a integrar será f(x)-g(x), siendo f(x) la recta (limita superiormente) y g(x) la parábola (limita inferiormente). Por tanto:

f(x)-g(x)=$x + 2 - x^2$ (Diferencia de las dos funciones)

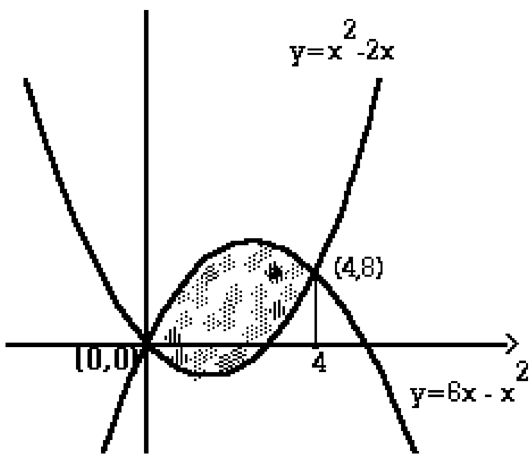
Por último, solo nos queda calcular la integral siguien*te:*

$$I = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$

$$\textit{Área encerrada entre las funciones} = \frac{9}{2} u^2$$

2. Determinar el área comprendida entre las curvas y=6x-x^2 y=x^2-2x

Solución:



Fuente: Elaboración propia

$$6x - x^2 = x^2 - 2x \to 2x^2 - 8x = 0$$
$$2x(x-4) = 0 \to x = 0 \to x = 4$$

La función a integrar $(x^2 - 2x) - (6x - x^2) = 2x^2 - 8x$

$$I = \int_0^4 (2x^2 - 8x)dx = \left[\frac{2x^3}{3} - 4x^2\right]_0^4 = = \frac{128-192}{3} = -\frac{64}{3}$$

Área= $\left| -\frac{64}{3} \right| = \frac{64}{3}$ u^2

3. Área acotada por la parábola y=3x-x^2; y la recta y=x-3

Solución:

Límites de integración: $3x - x^2 = x - 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

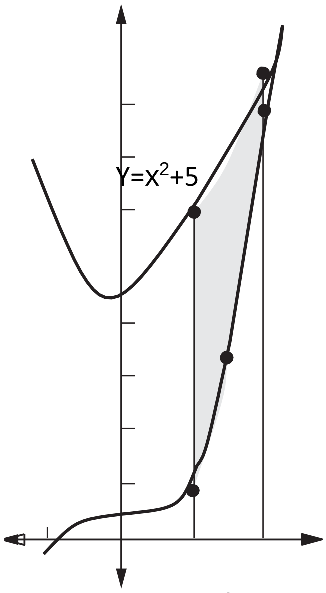
Resolviendo la ecuación se obtiene x=3; x=-1

Función a integrar: $I = \int_{-1}^{3} (x^2 - 2x - 3)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right]_{-1}^{3} = -\frac{32}{3}$

Área= $\left| -\frac{32}{3} \right| = \frac{32}{3} u^2$

4. Determinar el área comprendida entre las curvas y=x^2+5; y=x^3 entre x=1 y x=2

Solución:



Fuente: Elaboración propia

La gráfica y= x^2+5, se encuentra sobre la curva $y=x^3$ en el intervalo comprendido

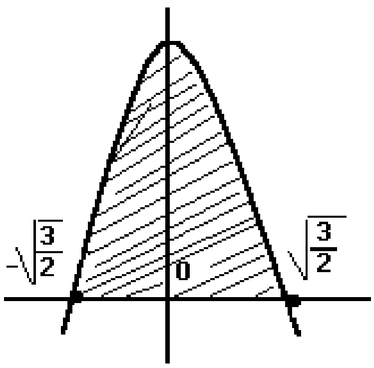
$$1 \leq x \leq 2$$

$$A=\int_1^2 \left(y_{\text{sup.}}-y_{\text{inf.}}\right)dx=\int_1^2 \left(\left(x^2+5\right)-x^3\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}+5x-\frac{x^4}{4}\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{8}{3}+10-\frac{16}{4}\right)-\left(\frac{1}{3}+5-\frac{1}{4}\right)=\frac{43}{12}$$

5. Calcular el área limitada por la ecuación de la parábola $y=2(1-x^2)$ y la ecuación de la recta y=0

Solución:



Fuente: Elaboración propia

Se determina los límites de integración : $2(1-x^2)=-1 \Rightarrow 3=2x^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

Función a integrar: $2(1-x^2)-(-1)=3-2x^2$

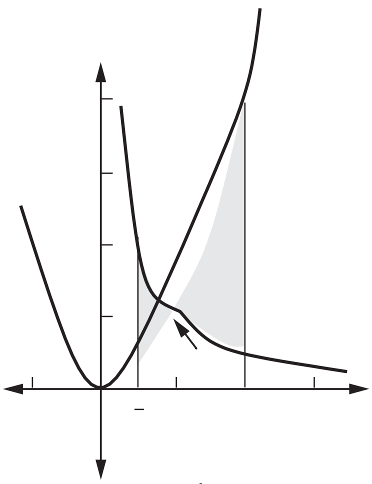
La curva de la gráfica es simétrica con respecto al eje de las ordenadas, el área se puede obtener, integrando entre los límites 0, y $\sqrt{\frac{3}{2}}$ y el resultado multiplicar por 2.

$$I=\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}}(3-2x^2)dx=\left[3x-\frac{2x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} = 2\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$Area=4\sqrt{\frac{3}{2}}u^2$$

5.Determinar el área acotada por las curvas y=1/x, y, y= x^2 comprendida entre x=1/2, x=2

Solución:



Fuente: Elaboración propia

Para determinar el área requerida, se divide en dos partes; la primera, la curva y=1/x, se encuentra en la gráfica en la parte superior de la curva y= x^2, en los límites x=1/2. y x=1. La segunda parte la curva y= x^2, está sobre la curva y=1/x, en los límites x=1, y x=2.

El área total será la suma de las áreas parciales:

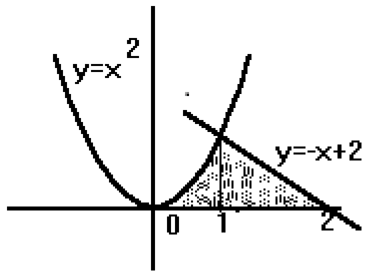
$$A=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{x}-x^2\right)dx+\int_{1}^{2}\left(x^2-\frac{1}{x}\right)dx=\left|\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x}dx-\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^2dx\right|+\left|\int_{1}^{2}x^2dx-\int_{1}^{2}\frac{1}{x}dx\right|$$

$$A=\left[\ln x-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}+\left[\frac{x^3}{3}-\ln x\right]_{1}^{2}=\left[\left(Ln1-\frac{1}{3}\right)-\left(Ln\frac{1}{2}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}\right)\right]+\left[\left(\frac{2^3}{3}-Ln2\right)-\left(\frac{1^3}{3}-Ln1\right)\right]$$

$$A=2.0416u^2$$

6. Hallar el área del espacio limitado por la parábola y = x^2, la recta de la ecuación y = -x+2 y el eje OX.

Solución:



Fuente: Elaboración propia

Punto de corte de la parábola y el eje OX: $x^2=0 \Rightarrow x=0$

Punto de corte de la recta y el eje =OX: $-x+2=0 \Rightarrow x=2$

Punto de corte de la parábola y la recta:

$$x^2=-x+2 \Rightarrow x^2+x-2=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=1;-2$$

La solución x = -2 está fuera del eje OX, por tanto, sólo se debe considerar el valor x =1.

Observando el dibujo, se ha resuelto las integrales siguientes:

$$I_1 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}; \quad I_2 = \int_1^2 (-x+2)dx = \frac{1}{2}; \quad Area = \left|\frac{1}{3}\right| + \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{5}{6}u^2$$

Ejercicios propuestos

1. Hallar el área comprendida limitada por la parábola f(x)= x^2-x-6 y el eje X en el intervalo (0,2).

2. Encontrar el área acertada entre la curva y=3x^2+3x-1 y la recta y=5x+2.

3. Determinar el área limitada por la función y= 2x^3-x^2+x y el eje x.

4. Calcular el área comprendida entre las curvas y= 2x^2-5x, y=x^2-2x y x=1

5. Determinar el área de la región encerrada entre las siguientes curvas:

a) y =x^2 y =4-x^2 b) y =x^3 y =x^2 c) y= x^2 y= $\sqrt{x}$

6. Establecer el área limitada por la curva de la ecuación y = 2$\sqrt{x}$ y la recta y = x

7. Encontrar el área de la región limitada por las curvas y=$\sqrt{x}$, y, y=x

8. Encontrar el área limitada por las curvas y = 3x-x^2+9, y=x^2-3x.

9. Encontar el área limitada por las gráficas y^2=x, x-y=2.

10. Encontrar el área de la región entre las curvas. y = x-2, y = 4-3x.

11. Determinar el área acotada entre por las curvas: y = x^2-5x+5, y = 12-x^2, entre x=3, y x=5

12. Encuentre el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones y^2 = 4x, *y*

y=mx, donde *m* es una constante positiva.

13. a. Encuentre el área de la región limitada por las gráficas y = x^2-1 y = 2x+2

b. ¿Qué porcentaje del área en la parte (a) se encuentra arriba del eje *x*?

14. La región limitada por la curva y = x^2 y la recta *y*=4 está dividida en dos partes de igual área por la recta y=k, donde *k* es una constante. Encuentre el valor de *k*.

15. Hallar el área comprendida por la parábola $f(x) = x^2 - x - 6$ y el eje X en el intervalo (0,4).

17. Las siguientes gráficas corresponden a las funciones**:**

$\boldsymbol{y = x^3 - 2x}$ ***e*** $\boldsymbol{y = \frac{x^3}{2}}$ Calcular el área del recinto limitada por ellas.

18. Determinar el área de la región limitada por la gráfica de las ecuaciones indicadas:

a) $y=8x-14-x^2$, $y=\frac{9}{x}$

b) $y=\sqrt{45-x^2}$, $y=8-2x-x^2$

b) $y=x^3-8x+1$, $y=x^2-4$

d) $y=x^5-3x^3+2x$, $y=x^2-4$

19. El volumen V en litros de aire en los pulmones durante un ciclo respiratorio de 5 segundos viene dado aproximadamente por el modelo.

$$V = 0,1729t + 0,1522t^2 - 0,0374t^3$$

donde t es el tiempo en segundos. Aproximar el volumen promedio de aire en los pulmones durante un ciclo.

20. La velocidad v del flujo de sangre a una distancia **r** del eje central de la arteria de radio **R** viene dado por

$$v = k\,(R^2 - r^2)$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Hallar el flujo medio de sangre a lo largo de un radio de arteria, tomando los límites de integración entre 0 y R.

UNIDAD V. APLICACIONES EN LA ADMINISTRACIÓN Y ECONOMÍA

Se utiliza para determinar las **ventas totales** en un periodo específico, así como los **costos operativos**, por ejemplo:

1. Durante los primeros cinco años que un producto se puso a la venta en el mercado la función f(x) describe la razón de ventas cuando pasaron x años desde que el producto se presentó en el mercado por primera vez. Se sabe que si $f(x)=2700\sqrt{x}+900$, si $0\le x\le 5$. Calcule las ventas totales durante los primeros cuatro años.

Solución:

$$\int_0^4 (2700\sqrt{x}+900)dx = 2700\int_0^4 (x)^{\frac{1}{2}}dx + 900\int_0^4 dx$$

La venta total es $=\left[\frac{2700\left(2x^{\frac{3}{2}}\right)}{3}+900x\right]_0^4 = \left(1800x^{\frac{3}{2}}+900x\right)_0^4$

$$=1800(4)^{\frac{3}{2}}+900(4)=1800 unidades$$

2. Se espera que la compra de una nueva máquina que genere un ahorro en los costos de operación. Cuando la máquina tenga x años de uso la razón de ahorro sea de f(x) pesos al año donde f(x) = 1000 + 5000x.

a) ¿Cuánto se ahorra en costos de operación durante los primeros seis años?

b) Si la máquina se compró a $ 67500 ¿cuánto tiempo tardará la máquina en pagarse por sí sola?

Solución:

a) Para conseguir el ahorro durante los primeros seis años se determina:

$$\int_0^6 (1000+5000x)dx = 1000\int_0^6 dx + 5000\int_0^6 x\,dx$$

$$= \left[1000x + 5000\frac{x^2}{2}\right]_0^6 = 6000 + 90000 = \$96000$$

b) Dado que el precio de compra es de $ 67500, el número de años de uso que se requieren para que la máquina se pague sola es n, entonces:

$$\int_0^n (1000+5000x)dx = 67500$$

$$\left[1000x + 2500x^2\right]_0^n = 67500$$

$$1000n + 2500n^2 - 67500 = 0 \Rightarrow 2500n^2 + 1000n - 67500 = 0$$

$$5n^2 + 2n - 135 = 0$$

Resolviendo la ecuación, se tiene que n_1= -5.4 (valor que no se toma en cuenta en la solución del problema), n_2= 5.

Se tardará 5 años la máquina para que se pague sola.

Se pueden presentar varias situaciones económicas en donde las expresiones se pueden formular como integrales definidas y representar geométricamente como áreas entre curvas. Por ejemplo, al determinar **utilidades netas:**

1. Si dentro de x años un plan de inversión generará utilidades a un ritmo de $U_1(x) = 50 + x^2$ dólares por año, mientras que un segundo plan lo hará a un ritmo de $U_2(x) = 200 + 5x$ dólares por año.

a. ¿Cuántos años será más rentable el 2º plan?
b. ¿Cuál es el exceso de utilidad neta, si se invierte en el 2º plan, en lugar del 1º, durante el período que éste es más rentable que el 1º?

Solución:

a. El segundo plan será más rentable hasta que $U_1(x) = U_2(x)$

$50 + x^2 = 200 + 5x \quad \Rightarrow x^2 - 5x - 150 = 0 \Rightarrow \; x = 15 \; años \; (\; no \; tener \; en \; cuenta \; x = -10\;)$

b. Para $0 \leq x \leq 15$, la regularidad al que las utilidades generadas por el 2º plan exceden las del 1º es $U_2(x) - U_1(x)$ dólares por año. Entonces el exceso de utilidad neta que genera el 2º plan durante los 15 años está dado por la integral definida:

$$Exc. \; de \; utilidad \; neta = \int_0^{15} [U_2(x) - U_1(x)]\, dx = \int_0^{15} [(200 + 5x) - (50 + x^2)]\, dx =$$

$$= \int_0^{15} (-x^2 + 5x + 150)\, dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x + 150x \right)\Bigg|_0^{15} = 1.687{,}50 \; dól.$$

1. Coeficiente De Desigualdad Para La Distribución De Ingreso

El índice de desigualdad, es una medida que sintetiza la manera cómo se distribuye una variable entre un conjunto de individuos. En el caso particular de la desigualdad económica, la medición se asocia al ingreso (o al gasto) de las familias o personas.

Este indicador, que se clasifica entre las medidas estadísticas para el análisis de la distribución del ingreso, no utiliza como parámetro de referencia el ingreso medio de la distribución –a diferencia de la desviación media, la varianza y el coeficiente de variación, dado que su construcción se deriva a partir de la **curva de Lorentz**, que muestra el porcentaje acumulado del ingreso total que pertenece al p% (porcentaje de población) más pobre de la población.

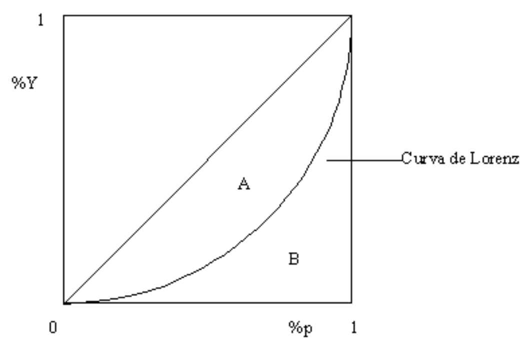
La curva de Lorenz y el coeficiente de Gini son dos indicadores relacionados entre sí que miden el grado de distribución del ingreso en un país.

El índice de Gini mide el grado de la distribución del ingreso entre los individuos de un país con respecto a una distribución con perfecta igualdad. El índice de Gini mide la concentración del ingreso. Su valor puede estar entre cero y uno. Cuanto más próximo a uno sea el índice Gini, mayor será la concentración de la riqueza; cuanto más próximo a cero, más equitativa es la distribución del ingreso en ese país. El valor 0 representa la igualdad perfecta y el 1, la desigualdad total.

La curva de Lorenz es una forma gráfica de mostrar la distribución del ingreso en una población. En ella se relacionan los porcentajes de población (abscisas) con porcentajes de ingreso (ordenadas) que esta población recibe. En la curva de Lorenz en el eje de abscisas, por tanto, se representa la población “ordenada” de forma que los percentiles de ingreso más bajo quedan a la izquierda y los de ingreso más alto quedan a la derecha.

El coeficiente de Gini (coeficiente de desigualdad de la curva de Lorentz), se calcula como el cociente entre el área comprendida entre la diagonal y la curva de Lorentz (área A en el gráfico) sobre el área bajo la diagonal (área A+B). Si existiera perfecta igualdad, la curva de Lorentz coincidiría con la diagonal, el área A desaparecería y el coeficiente de Gini será “0”, indicando ausencia de desigualdad.

En el otro caso extremo, si existiera desigualdad total (es decir, una situación donde todo el ingreso sea propiedad de una sola persona) la curva de Lorenz coincidiría con los ejes, el área B desaparecería y el Gini se haría 1, indicando desigualdad total.



Fuente: Elaboración propia

El coeficiente de desigualdad de la curva de Lorentz está dado por:

L= 2* área entre la curva de Lorentz y la línea y=x

$$L = 2\int_0^1 \left[x - f(x)\right]dx$$

Donde y = f(x) es la ecuación de la curva de Lorentz. x=porcentaje de población, y= porcentaje de ingreso.

El coeficiente de desigualdad siempre estará entre 0 y 1. Cuando el coeficiente es cero, el ingreso está distribuido de manera uniforme perfecta; cuando más se acerca a 1, mayor será la desigualdad en la distribución del ingreso.

Ejemplos de aplicación

1. La distribución del ingreso de cierto país está determinada por la curva de Lorentz $y = \frac{19}{20}x^2 + \frac{1}{20}x$, donde "x" es proporción de captadores de ingreso y "y" es la proporción total de ingreso total recibido.

a) ¿Qué proporción recibe el 20% de la gente más pobre?

b) Determinar el coeficiente de desigualdad de la curva de Lorentz.

Solución:

a)

$$y = \frac{19}{20}(0.2)^2 + \frac{1}{20}(0.2)$$
$$y = 0.038 + 0.01 = 0.048$$

Esto significa que el 20% de gente con los ingresos más bajos solo recibe el 4.8% del ingreso total.

b)

$$L = 2\int_0^1 \left[x - \left[\frac{19}{20}x^2 + \frac{1}{20}x \right] \right] dx$$
$$L = 2\left[\int_0^1 x dx - \frac{19}{20}\int_0^1 x^2 dx - \frac{1}{20}\int_0^1 x dx \right]$$
$$L = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{19}{20} * \frac{x^3}{3} - \frac{1}{20} * \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{19x^3}{60} - \frac{x^2}{40} \right]_0^1$$
$$L = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{19}{60} - \frac{1}{4} \right) = 2(0.5 - 0.316 - 0.25) = 2(0.066) = 0.132$$

2. La distribución de ingreso de un país sigue la curva de Lorentz $y = \frac{15}{16}x^2 + \frac{1}{16}x$

a) ¿Qué proporción de ingreso recibe el 20% de las familias?

b) Calcular el coeficiente Gini.

Solución:

a)
$$y(0.2) = \frac{15}{16}(0.2)^2 + \frac{1}{16}(0.2)$$
$$y(0.2) = \frac{0.6}{16} + \frac{0.2}{16} = 0.05$$

El 20% de las familias recibe el 5% del ingreso total.

$$L = 2\int_0^1 [x - f(x)]dx = 2\int_0^1 \left[x - \left(\frac{15}{16}x^2 + \frac{1}{16}x \right) \right]$$

b)
$$L = 2\left[\frac{x}{2} - \frac{15(x^3)}{16(3)} - \frac{x^2}{32} \right]_0^1 = 2[05x - 0312x^3 - 0.0312x]_0^1$$
$$L = 2(0.5 - 0.312 - 0.0312) = 2(0.156) = 0.313$$

2. Curvas De Aprendizaje

El proceso de aprendizaje puede ser descompuesto en dos partes: la parte de introducción o preparatoria durante la cual la persona aprende la secuencia de operaciones que debe de hacer, la parte complementaria cuando el individuo sabe la secuencia y por repetición mejora su capacidad para realizar la tarea.

En el aprendizaje complementario es donde se aplica la curva de aprendizaje, ya que, el aprendizaje preparatorio depende de factores muy variados como son calidad del material para su uso, técnicas apropiadas para enseñar al personal, capacidad de comprensión de individuo, etc.

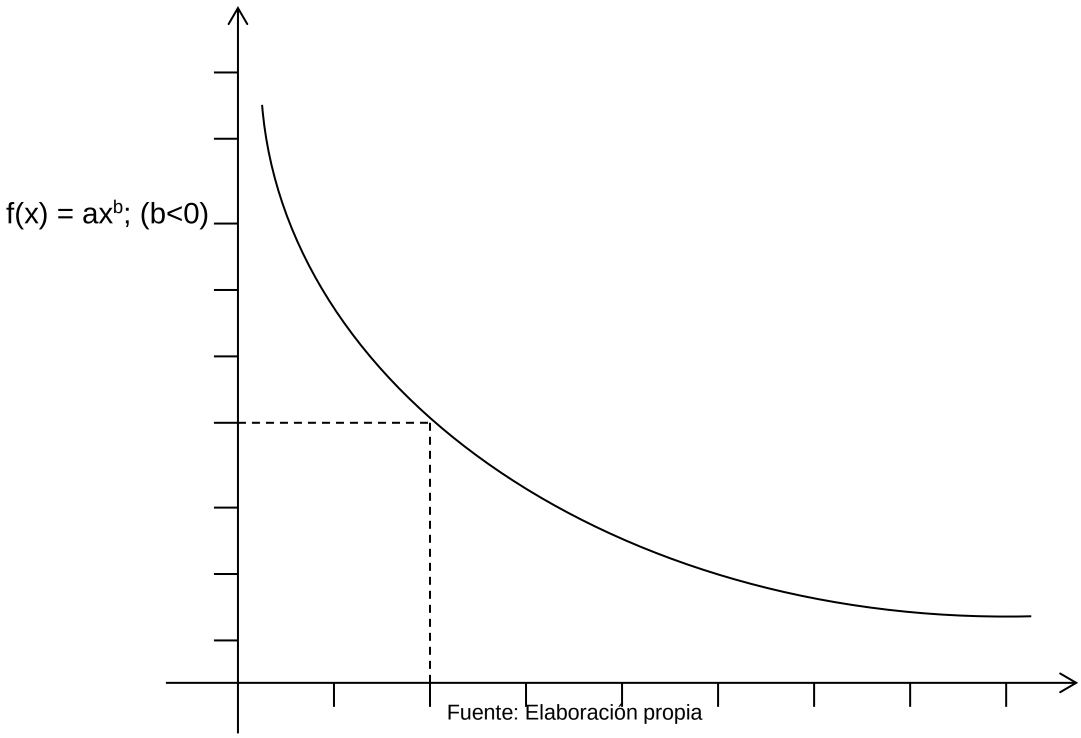
Una operación sencilla o complicada toma un tiempo antes de que el operario logre la coordinación física y mental que le permitan proceder de un elemento a otro sin duda o demora. Este periodo y el nivel relacionado de aprendizaje forman la curva de aprendizaje.

Una vez que el operario alcanza la parte más plana de la curva, se simplifica el problema para desarrollar un estándar.

La teoría de la curva de aprendizaje propone que cuando se duplica la cantidad total de unidades producidas, el tiempo por unidad disminuye en un porcentaje constante. Mientras más pequeña sea la tasa porcentual de mejora, mayor será la mejora progresiva en la tasa de producción.

La curva de aprendizaje está basada en una duplicación de la productividad. Es decir, cuando la producción se duplica, la disminución en el tiempo por unidad es igual a la tasa de la curva de aprendizaje. Así pues, los resultados de las actividades, herramientas y métodos aplicados al logro de la mejora continua pueden medirse, proyectarse y graficarse mediante la utilización de la Curva de Aprendizaje.

Importancia de la curva de aprendizaje. Es útil disponer de curvas de aprendizaje representativas de las diversas operaciones. Esta información se puede utilizar para determinar la etapa de producción en la que sería deseable establecer el estándar, también para proporcionar una guía del nivel de productividad esperado de un operario promedio con un grado conocido de familiaridad con la operación, después de producir un número fijo de piezas.



Fuente: Elaboración propia

Si F'(x) = f(x), la función que por lo general se utiliza en esa situación es de la forma:

$$F(x) = ax^b$$

Donde a y b son constantes, en a>0, y -1≤b<0. La elección ax^b, con las condiciones anteriores, asevera que el tiempo requerido por la unidad disminuye a medida que se producen más unidades. La gráfica f(x), se denomina **curva de aprendizaje.**

Luego que se ha establecido la curva de aprendizaje, se puede utilizar en la predicción de número de horas-hombre requeridas en niveles de producción futuras. **El número de horas-hombre requeridas ΔT requeridas para producir unidades numeradas c+1hasta d,** está dada por:

ΔT= (horas-trabajo para unidades producidas d) – (horas-trabajo para producir las primeras c de ellas)

ΔT = F(d) – F(c)

Esto es $\Delta T = \int_c^d f(x)dx = \int_c^d ax^b dx$

Ejemplos de aplicación

1. Después de producir 3000 electrodomésticos, una empresa establece que el área de ensamblado sigue la curva de aprendizaje $f(x) = 25x^{-0.152}$ donde f(x) es el número de horas-hombre requeridas para ensamblar (x+1) electrodomésticos. Calcular el número de horas-hombre que se necesitan para poder producir 6000 electrodomésticos adicionales.

Solución:

El número de horas-hombre, requeridas para ensamblar 6000 artefactos adicionales es:

$$\Delta T = \int_{3000}^{9000} f(x)dx = \int_{3000}^{9000} \left(25x^{-0.152}\right)dx = \left[25 * \frac{x^{-0.152+1}}{-0.152+1}\right]_{3000}^{9000}$$

$$\Delta T = \frac{25}{0.848}\left[(9000)^{0.848} - (3000)^{0.848}\right]$$

$$\Delta T = 29.48(2255.27 - 888.38) = 29.48(1366.89)$$

$$\Delta T = 40295.92 horas - \text{hom} bre$$

2. Después de pintar los primeros 80 automóviles, se ha determinado que el proceso de pintado de automotores sigue la curva de aprendizaje de la forma $f(x) = 12x^{-0.25}$. Encontrar el número de horas- hombre requeridas para pintar 100 automotores adicionales.

Solución:

$$\Delta T = \int_c^d f(x)dx = \int_{80}^{180} \left(12x^{-0.25}\right)dx \left[12 * \frac{x^{-025+1}}{-0.25+1}\right]_{80}^{180} = \left[12 * \frac{x^{075}}{0.75}\right]_{80}^{180}$$

$$\Delta T = \left[16(180)^{0.75} - 16(80)^{0.75}\right] = 786.27 - 427.99 = 358.28 Horas - Hombre$$

3. Maximización De La Utilidad Con Respecto Al Tiempo

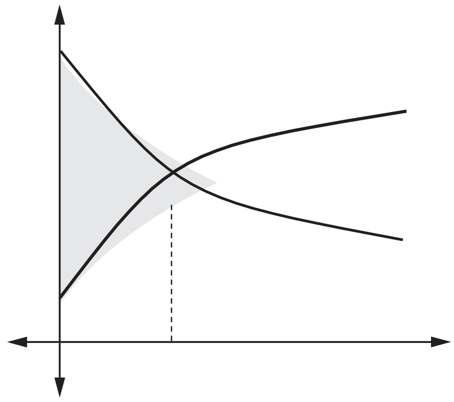
En las empresas extractivas tales como mineras, y perforación de petróleo, se tornan poco rentables después de cierto periodo de tiempo. En estas operaciones la tasa de ingreso puede ser muy alta al inicio de la operación, pudiendo decrecer a través del tiempo debido a la disminución del recurso. Los costos iniciales se incrementan a medida que se incrementan las operaciones productivas, se realiza con mayor frecuencia los mantenimientos preventivos y correctivos, costos de extracción y otros.

En tales procesos, en cierto momento se vuelven más caros los costos operativos que el ingreso, ocasionando pérdidas para la empresa. Los directivos deben tomar la decisión de cerrar la empresa al no tener una rentabilidad beneficiosa para ellos, es necesario determinar la utilidad máxima.

Se determina como C(x) al costo total, I(x) el ingreso total y U(x) la utilidad total en el instante t (medidas en el inicio de la operación), recibiendo:

U(t) = I(t) - C(t)   igualmente   U´(t) = I´(t) – C´(t)

La utilidad máxima se obtiene cuando U´(t) = 0 o bien I´(t) = C´(t), esto es:



Fuente: Elaboración propia

Se debe determinar la utilidad en el momento en que el ingreso y el costo son iguales.

$$U(t1) = \int_0^{t1} U'(t)dt = \int_0^{t1} [I'(t) - C'(t)]dt$$

Ejemplos de aplicación

1. Las tasas de ingreso y costo de una operación petrolera están dadas por:

$$I'(t) = 14 - t^{\frac{1}{2}} \qquad C'(t) = 2 + 3t^{\frac{1}{2}}$$

Donde el tiempo t se mide en años, y el costo e ingreso en millones de dólares. ¿Cuánto debe prologarse la perforación para obtener una utilidad máxima? ¿Cuál será el monto de esa utilidad?

Solución

En el instante que el costo e ingreso son iguales, se obtiene la ganancia máxima, para lo cual igualo y obtengo el tiempo óptimo para la utilidad.

$$I'(t) = C'(t)$$
$$14 - t^{\frac{1}{2}} = 2 + 3t^{\frac{1}{2}}$$
$$4t^{\frac{1}{2}} = 14 - 2$$
$$t^{\frac{1}{2}} = \frac{12}{4}$$
$$t = 9 años$$

Se debe prologar 9 años para obtener utilidad máxima

$$U = \int_0^9 \left[I'(t) - C'(t) \right] dt$$

$$U = \int_0^9 \left(14 - t^{\frac{1}{2}} - 2 - 3t^{\frac{1}{2}} \right) dt$$

$$U = \int_0^9 \left(12 - 4t^{\frac{1}{2}} \right) dt = \left[12t - 4\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]$$

$$U = \left[12t - \frac{8t^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_0^9 = \left[12(9) - \frac{8(9)^{\frac{3}{2}}}{3} \right] = 108 - 72 = \$36(millones)$$

2. Otra aplicación importante es el cálculo de las **ganancias netas producidas por una maquinaria industrial**, por ejemplo:

Cuando tienes x años, una maquinaria industrial genera ingresos a razón de $I(x) = 5.000 - 20x^2$ dólares por año, y los costos de operación y mantenimiento se acumulan a razón de $C(x) = 2.000 + 10x^2$ dólares por año.

a.) ¿Durante cuántos años es rentable el uso de la maquinaria?

b.) ¿Cuáles son las ganancias netas generadas por la maquinaria en ese periodo de tiempo?

Solución:

a) El uso de la maquinaria será rentable en tanto que el ritmo al que se generan los ingresos sea superior al que se generan los costos. Es decir, hasta que $I(x) = C(x)$

$$5000 - 20x^2 = 2000 + 10x^2$$

$$30x^2 = 3000 \quad \Rightarrow x = 10 \text{ años} \quad (\text{no tener en cuenta } x = -10)$$

b) Dado que las ganancias netas generadas por la maquinaria durante cierto período de tiempo están dadas por la diferencia entre el ingreso total generado por la misma y el costo total de operación y mantenimiento de ésta, se puede determinar esta ganancia por la integral definida:

$$\text{Ganancia neta} = \int_0^{10} [R(x) - C(x)]\, dx = \int_0^{10} [(5000 - 20x^2) - (2000 + 10x^2)]\, dx =$$

$$= \int_0^{10} (3000 - 30x^2)\, dx = (3000x - 10x^3)\Big|_0^{10} = 20000 \text{ dól.}$$

4. Superávit Del Consumidor Y Del Productor

Otra importante aplicación es el cálculo del **excedente de los consumidores y del excedente en la producción**.

La siguiente gráfica muestra una curva de oferta $F(q)$ para un producto, donde **p** indica el precio por unidad al que un fabricante venderá o suministrará **q** unidades.

También se muestra la curva de demanda $D(q)$ para el producto, donde **p** indica el precio por unidad al que los consumidores comprarán o demandarán **q** unidades del mismo.

El punto (q_0, p_0) es el punto de equilibrio, en el cual se presenta estabilidad en la relación producto – consumidor.

Suponiendo que el mercado está en equilibrio, en que el precio por unidad del producto es p_0, observando la curva de demanda se puede apreciar que hay consumidores que estarían dispuestos a pagar más que p_0 por el producto, así como también, si se observa la curva de la oferta, se podría concluir diciendo que hay productores que están dispuestos a ofrecer el producto a un precio inferior que p_0.

De esta manera ambas partes pueden obtener una ganancia total que se le llama exceso.

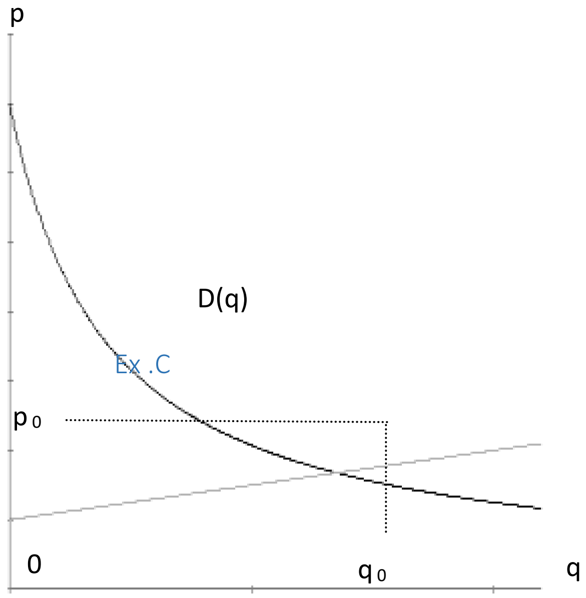
En el caso de los consumidores, se denomina **excedente o superávit del consumidor**, y es la ganancia total que obtienen los consumidores por el hecho de estar dispuestos a pagar el producto a un precio superior al del mercado. Este se puede calcular por la integral definida dada por:

$$\text{Exc . Cons} = \int_0^{q_0} \left[D(q) - p_0 \right] dq =$$

$$= \int_0^{q_0} D(q)\, dq - \int_0^{q_0} p_0\, dq =$$

$$= \int_0^{q_0} D(q)\, dq - p_0 .\, q \Big|_0^{q_0} =$$

$$= \int_0^{q_0} D(q)\, dq - p_0 . q_0$$



Fuente: Elaboración propia

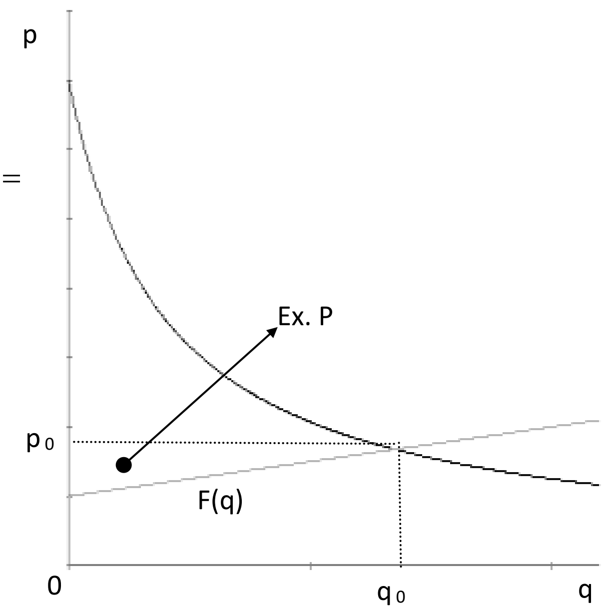
En el caso de los productores, se denomina **excedente o superávit del productor**, y es la ganancia total que obtienen los productores por el hecho de estar dispuestos a ofrecer el producto a un precio inferior al del mercado. Este se puede calcular por la integral definida dada por:

$$\text{Exc .P rod} = \int_0^{q_0} \left[p_0 - F(q) \right] dq =$$

$$= \int_0^{q_0} p_0\, dq - \int_0^{q_0} F(q)\, dq - =$$

$$= p_0 .\, q \Big|_0^{q_0} - \int_0^{q_0} F(q)\, dq =$$

$$= p_0 . q_0 - \int_0^{q_0} D(q)\, dq$$



Fuente: Elaboración propia

En el caso de que las funciones de oferta y demanda estuviesen representadas cantidades en función de los precios, el planteo para el cálculo de los excedentes es el siguiente:

$$\text{Exc. Cons.} = \int_{p_0}^{p_2} D(p)\,dp \qquad \text{Exc. Prod.} = \int_{p_1}^{p_0} F(p)\,dp$$

Ejemplos de aplicación

1. Se conoce que la curva de la oferta para un producto es s(x)= Encuentre

la ganancia de los productores si la producción asciende a diez artículos.

Si la producción asciende a 10 artículos el precio es s(10) = $\frac{10}{2}+7$ 12 dólares.

La ganancia o superávit de los productores se calculó resolviendo:

$$\int_0^{10}\left[12-\left(\frac{x}{2}+7\right)\right]dx = \int_0^{10}\left[12-\frac{x}{2}-7\right]dx = \int_0^{10}\left[5-\frac{x}{2}\right]dx$$

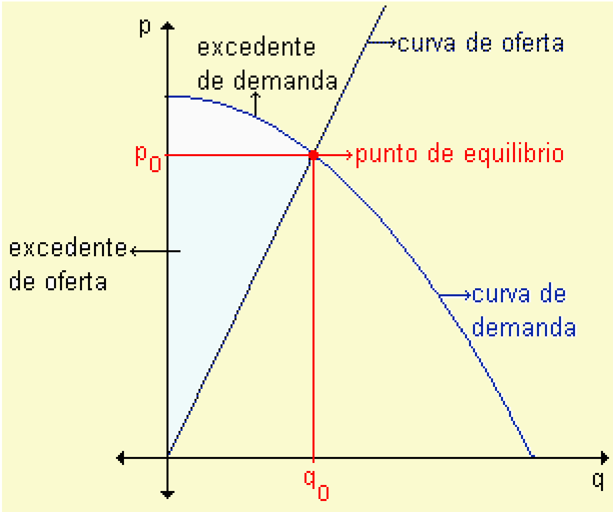
Ganancia de las productores $\left[5x-\frac{x^2}{4}\right]\Big|_0^{10}$ =25

La ganancia de los productores asciende a soles/25 si la producción es de diez artículos.

2. Calcule el exceso de oferta y el exceso de demanda para las curvas de demanda y oferta dadas.

Función de demanda: $p_1(q) = 1000 - 0,4\,q^2$. Función de oferta: $p_2(q) = 42q$

El exceso de oferta y el de demanda están representados por las áreas que muestra la gráfica:



Fuente: Elaboración propia

La oferta coincide con la demanda en (q_0, p_0) , es decir,:

$p_1(q) = p_2(q) \Rightarrow 1000-0,4q^2 = 42q$ □ $\Rightarrow -0,4q^2 - 42q + 1000 = 0$

$q_1 = -125 \;\wedge q_2 = 20$

Como los valores de las abscisas corresponde a número de artículos ofrecidos o demandados, $q_0 = 20$ y, por lo tanto, $p_0 = 840$.

El excedente de demanda o superávit de los consumidores es la región comprendida entre $p_1(q)$ y la recta $p = 840$, entre 0 y 20, o sea:

$$\int_0^{20}\left(1000-0,4q^2-840\right)dq = \int_0^{20}\left(160-0,4q^2\right)dq = \left.\left(160q-0,4\frac{q^3}{3}\right)\right|_0^{20} = 2133,33$$

El excedente de demanda asciende a soles/2133,33

El excedente de oferta es la región comprendida entre las rectas $p = 840$ y $p = 42q$ entre 0 y 20, o sea:

$$\int_0^{20}\left(840-42q\right)dq = \left.\left(840q-21q^2\right)\right|_0^{20} = (840.20 \;□\; 21.20^2) = 8400$$

El superávit de oferta alcanza $8400.

3. La función de oferta y demanda de cierto producto, están dadas por:

$$p = g(x) = 52 + 2x$$
$$p = f(x) = 100 - x^2$$

Determine el superávit del consumidor y productor, suponiendo que se ha establecido un equilibrio de mercado.

Solución:

El punto de equilibrio (x_0, p_0), se obtiene resolviendo las ecuaciones de la oferta y demanda, igualando las dos ecuaciones

$$52 + 2x = 100 - x^2$$
$$x^2 + 2x - 48 = 0$$
$$(x+8)(x-6) = 0$$
$$x = 6$$
$$x = -8$$

El valor negativo se rechaza, porque es inadmisible y utilizamos el valor de x=6 remplazo en la ecuación $p = 52 + 2x$

$$p = 52 + 12 = 64$$

Se obtiene el punto de equilibrio $x_0 = 6$ y $p_0 = 64$. El superávit del consumidor está dado por:

$$SC = \int_0^{x_0} [f(x) - p_0]dx$$

$$SC = \int_0^6 [(100 - x^2) - 64]dx$$

$$SC = \left[36x - \frac{x^3}{3}\right]_0^6 = 36(6) - \frac{(6)^3}{3} = 144$$

5. Excedente De Los Consumidores Y De Los Productores

Otra importante aplicación es el cálculo del **excedente de los consumidores y del excedente en la producción**.

La siguiente gráfica muestra una curva de oferta $\mathrm{F}(q)$ para un producto, donde **p** indica el precio por unidad al que un fabricante venderá o suministrará **q** unidades.

También se muestra la curva de demanda $D(q)$ para el producto, donde **p** indica el precio por unidad al que los consumidores comprarán o demandarán **q** unidades del mismo.

El punto (q_0 , p_0)es el punto de equilibrio, en el cual se presenta estabilidad en la relación producto – consumidor.

Suponiendo que el mercado está en equilibrio, en que el precio por unidad del producto es p_0, observando la curva de demanda se puede apreciar que hay consumidores que estarían dispuestos a pagar más que p_0 por el producto, así como también, si se observa la curva de la oferta, se podría concluir diciendo que hay productores que están dispuestos a ofrecer el producto a un precio inferior que p_0.

De esta manera ambas partes pueden obtener una ganancia total que llamamos exceso.

5.1 Teoría De Los Excedentes Del Consumidor Y Productor

Un principio muy común en la economía consiste en que cuando una persona deja de ganar dinero, realmente está perdiendo, y cuando deja de pagar dinero, está ganando.

Sin embargo, las ganancias y pérdidas señaladas no son tangibles porque no forman un flujo de dinero como es el caso, por ejemplo, de un flujo de caja en una empresa o una ganancia de una persona en un negocio.

Por ejemplo, una familia acostumbrada a gastar una cantidad de dinero en alimentación y de pronto se reduce los precios de los bienes que consume normalmente. Entonces esta familia gastará menos en dichos productos lo que significa que la familia tendrá una mayor disponibilidad de dinero que podrá ahorrarlo o gastarlo en otros bienes o servicios.

Si en un mercado la producción de bienes aumenta de tal manera que el precio disminuye, entonces todas las personas que venían consumiendo dicho producto se benefician porque pagarán menos que antes.

Cuando la demanda de un bien se expande, los productores se benefician porque el precio del bien aumenta, ocasionando que éstos reciban un precio por su producto, mayor al que existía antes de la expansión de la demanda.

A continuación, utilizaremos un modelo de oferta y demanda para explicar el excedente del consumidor y el excedente del productor.

5.2 El Excedente Del Consumidor

Iniciamos el análisis definiendo la función de la demanda y oferta de un bien denominado "X":

$$p = a - bq$$
$$p = c + dq$$

ambas son funciones inversas de la demanda y oferta porque la variable precio figura como la variable dependiente.

Si observamos la figura Nº 1, tenemos la demanda del bien "X" y su respectiva oferta. Inicialmente asumimos que la oferta 1 es la única existente. Así el equilibrio sería el "precio 1" y el "consumo 1". Es importante resaltar que el modelo no brinda la información de la cantidad de personas que consumen pero si nos da la información de la cantidad consumida y el precio del bien "X" en un momento determinado.

En tal sentido, un conjunto de personas consumen el bien "X" al precio 1 y se benefician del tal consumo. En este grupo existen personas que estuvieron dispuestas a pagar un precio mayor que el precio 1, por lo que éstas obtendrían un beneficio adicional al gastar menos en la adquisición del bien "X".

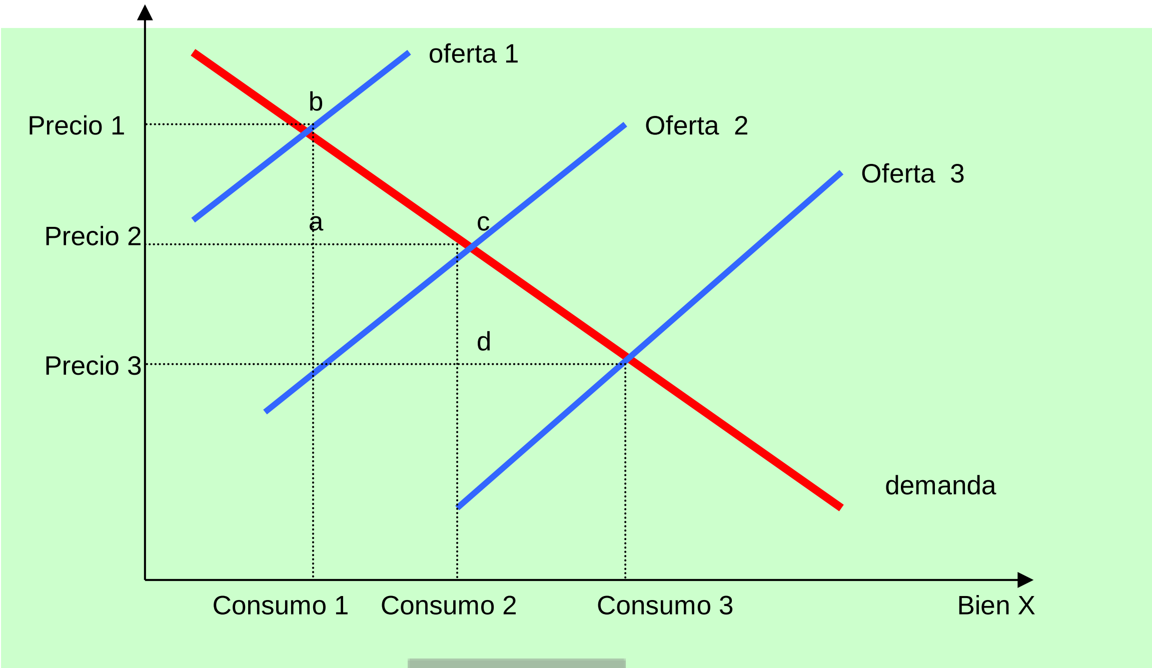


Figura Nª 1

Fuente: Elaboración propia

Otro grupo de personas, que están excluidas del primer grupo, consumirán el bien "X" si es que el precio es menor que el precio 1.

Si suponemos que la oferta se expande de tal manera que el equilibrio se dará en el precio 2 con un mayor consumo.

El consumo aumenta porque se ofrecen más productos en el mercado, y el precio disminuye porque se presenta un exceso de productos ofertados al "precio 1", lo que presiona a la disminución al precio toda vez que los ofertantes no logran vender todos sus productos al "precio 1".

Ahora bien, ¿cómo se beneficia el primer grupo por la expansión de la oferta y por tanto de la disminución del precio del bien "X"?

Este grupo inicial de consumo pagará un diferencia en el precio:

$$beneficio = precio\_1 - precio\_2$$

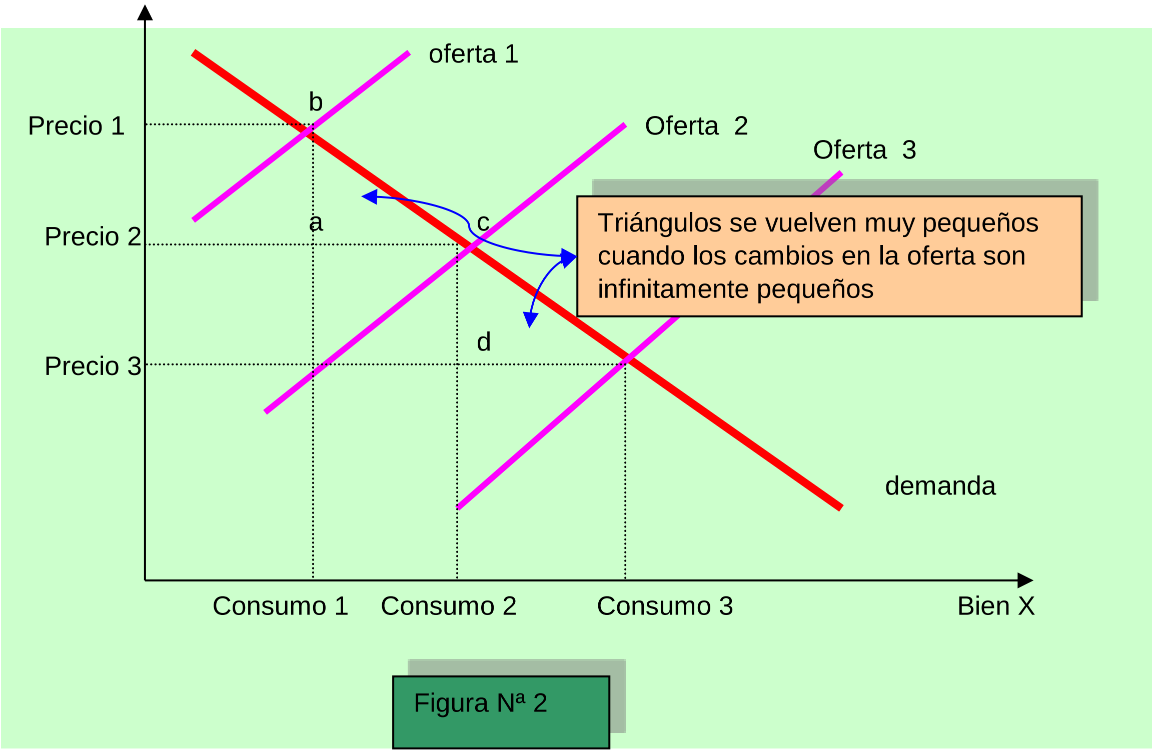
Este grupo de personas se benefician porque pagarán una cantidad menor de dinero, ya que estaban dispuestos a pagar el "precio 1" y ahora pagan el "precio 2". El segundo grupo paga por el bien X el precio 2, beneficiándose de la expasión de la oferta y de la disminución del precio del bien mencionado. Lo mismo sucede para el caso de una nueva expansión de la oferta y con la consiguiente disminución del precio del bien “X”. Y así se presentan innumerables procesos de variación de la oferta presentándose beneficios para aquellos consumidores que estaban dispuestos a pagar más por el bien “X”.

Los beneficios que se irán formando dependerán de los cambios en los precios, pues, éstos pueden ser de consideración o pueden ser pequeños y graduales. En tal sentido, como se señaló anteriormente, el beneficio es el diferencial de los precios cada vez que se expande la oferta del bien “X”. El primer grupo que estaba dispuesto a pagar el precio 1 y ahora paga el precio 2 obtiene el beneficio pero éste es unitario, es decir, por cada bien que se compra.

Si antes compraba 10 bienes “X” a dos nuevos soles, gastaba 20 nuevos soles. Si el precio disminuye a 1 nuevo sol, entonces por cada producto que compro, gano 1 nuevo sol, o en otras palabras, ahorro 1 nuevo sol. Si sigo comprando 10 bienes, entonces ahorraré 10 nuevos soles, o tendré un beneficio de 10 nuevos soles. Este beneficio se puede visualizar en la figura Nº 1, en el área del rectángulo cuya altura es la diferencia entre el precio 1 y el precio 2, o la distancia entre el punto “a” y el punto “b”, y la base, el consumo 1.

Si se expande nuevamente la oferta y el precio disminuye el precio 3, entonces se formará un nuevo beneficio que sería el área de un rectángulo de altura el diferencia del precio 3 y precio 2, (o diferencia entre el punto “c” y el punto “d”) y como base el consumo 2.

Si las expansiones de las ofertas son infinitamente pequeñas se irán formando rectángulos de tal manera que las áreas triangulares arriba de estos rectángulos serán cada vez más pequeñas de tal manera que se conviertan en despreciables.



Fuente: Elaboración propia

En la figura Nº 2, se resalta que cuando los cambios en la oferta son infinitamente pequeños, los triángulo se vuelven despreciables por lo que el beneficio sería el área debajo de la curva de la demanda hasta la altura del precio. Para el caso del precio 1, el beneficio sería el área debajo de la curva de la demanda hasta la altura del precio 1; para el caso del precio 2, el beneficio de los consumidores nuevos y antiguos sería el área debajo de la curva de demanda hasta la altura del precio 2; y lo mismo para el caso en que el equilibrio del mercado sea el precio 3.

En tal sentido, el beneficio que se forma en el mercado, asumiendo el precio 3 como el del equilibrio, y el consumo 3, por ende, será todo el área debajo de la curva, o el área del triángulo formado por la curva de la demanda y la horizontal del precio 3.

5.3 El Excedente Del Productor

El excedente del productor tiene la misma lógica que el del excedente del consumidor, en vista que se puede visualizar también como un área utilizando el modelo de la oferta y la demanda.

Si se observa la Figura Nº 3, se tienen tres demandas. La primera demanda se cruza con la oferta en el punto "a", y así tenemos el precio 1 y la producción 1. Las empresas fijan el precio del bien "X" con base en lo dispuesto a pagar por el total de consumidores. Cuando la demanda se expande (demanda 2), esta se cruza con la oferta en el punto "b", la producción aumenta y el precio del bien "X" también aumenta dado que se forma en el mercado un exceso de demanda que presiona el precio a aumentar.

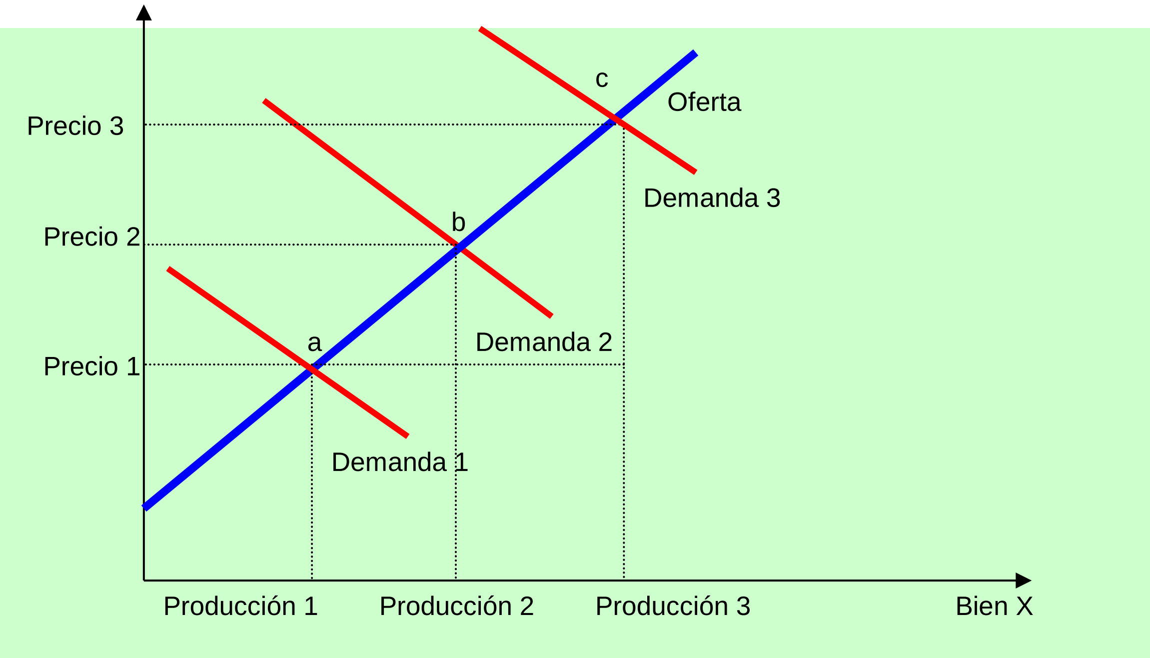
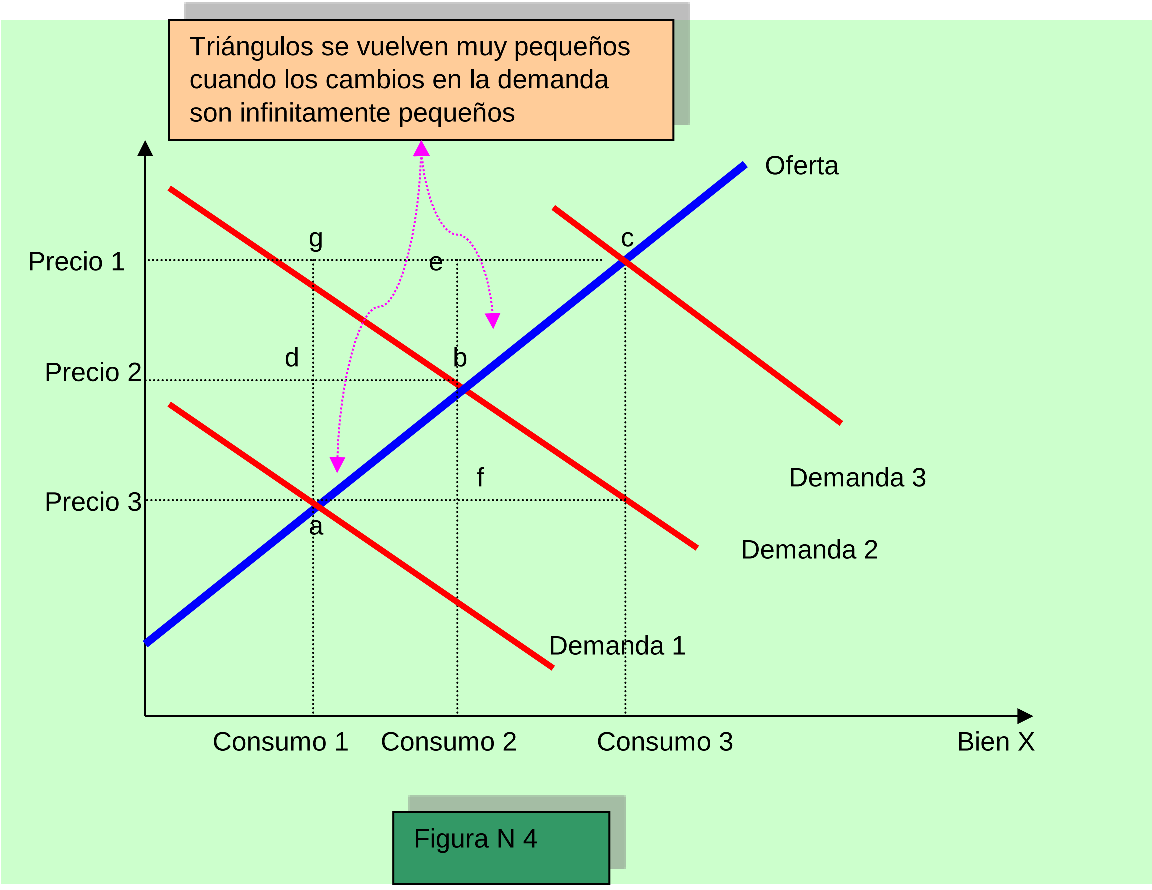


Figura Nª 3

Fuente: Elaboración propia

Asumiendo que han aumentado la cantidad de consumidores en el mercado, las empresas después de esta expansión de la demanda venden su producto a un mayor precio. La cantidad de productos relacionado a la cantidad producida inicial (producción 1) eran vendidos al precio 1, sin embargo, estos mismos productos ahora son vendidos al precio 2 por lo que se presenta un beneficio dada la expansión de la demanda. La diferencia entre el precio 2 y el precio 1 será el beneficio que obtendrán las empresas que antiguamente vendían su producto al precio 1 y ahora lo venden al precio 2. En tal sentido, tenemos que:

$$beneficio = precio\_2 - precio\_1$$



Fuente: Elaboración propia

Si se observa la Figura Nº 4, se puede evidenciar que el beneficio que se forma una vez expandida la demanda (demanda 2) será el área del rectángulo formado por el precio 2, el precio 3, y los puntos “a” y “d”.

Cuando se vuelve a expandir la demanda (demanda 3), el nuevo beneficio será el área del rectángulo formado por los puntos “d”, “b”, “e” y “g”. Sin embargo, quedan las áreas de dos triángulos formados por los puntos “b”, “c”, “e”, y, “a”, “d”, “b”. Si se asume que las expansiones de la demanda son infinitamente pequeñas, al igual que el caso del excedente del consumidor, entonces las áreas de los triángulos que se forman con cada expansión de la demanda serán infinitamente pequeñas y por tanto despreciables. Luego, el beneficio del total de productores será el área formada entre la línea horizontal del precio 3 y la curva de la oferta.

Finalmente, el beneficio total del consumidor y del productor, llamados también el *excedente del consumidor y el excedente del productor* lo podemos visualizar en la Figura Nº 5. Ambos excedentes serán la suma de las áreas formadas entre la curva de la demanda y la curva de la oferta. Estos excedentes se forman cuando la demanda y la oferta, ambas, se expanden hasta que el mercado se equilibra. En el transcurso, los beneficios se van formando, y en el equilibrio, tanto consumidores como productores se benefician. Los primeros se benefician porque pagan un precio menor al que estaban dispuestos a pagar, y los segundos, porque el precio de su producto aumentó más allá de los que esperaban dada la expansión de la demanda.

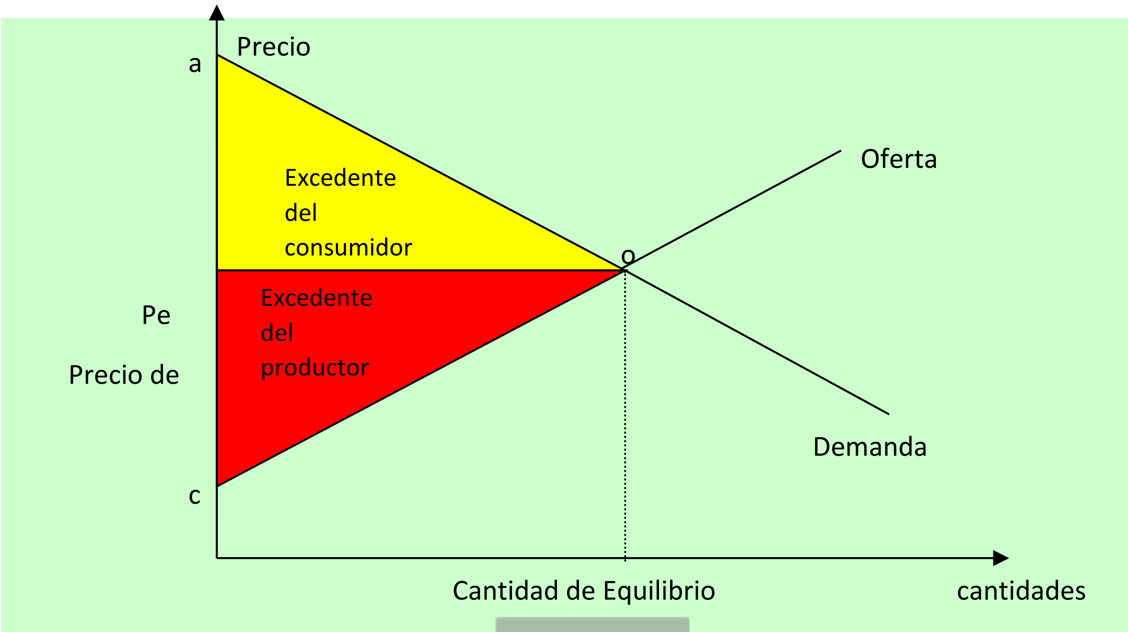


Figura N 5

Fuente: Elaboración propia

Análisis Matemático

Sean las siguientes funciones de demanda y oferta:

$$p = a - bq$$
$$p = c + dq$$

El equilibrio del sistema de ecuaciones de demanda y oferta será el siguiente:

$$p^e = \frac{d.a + b.c}{d + b}$$
$$q^e = \frac{a - c}{d + b}$$

El excedente del consumidor será formado por el área del triángulo formado por los puntos “a”, “o”, y “Pe” de la Figura Nº 5. La ecuación que representa dicha área es la siguiente:

$$Excedente\_consumidor = \frac{1}{2}.\frac{a-c}{d+b}\left[a - \frac{d.a+b.c}{d+b}\right]$$

donde el primer quebrado literal es la cantidad de equilibrio que sería la base del triángulo, y el término entre corchetes es la altura del mismo.

Simplificando esta última ecuación, tenemos:

$$Excedente\_consumidor = \frac{b}{2}.\left(\frac{a-c}{d+b}\right)^2$$

Siguiendo la misma lógica, se evidencia que el excedente del productor estaría representado por la siguiente ecuación:

$$Excedente\_productor = \frac{d}{2}.\left(\frac{a-c}{d+b}\right)^2$$

Sumando ambos excedentes para obtener el excedente total en el mercado, se obtiene la siguiente ecuación:

$$Excedente\_Total = \frac{1}{2}.\left(\frac{a-c}{b+d}\right)^2 (b+d)$$

Finalmente, la ecuación se simplifica de la siguiente manera:

$$Excedente\_Total = \frac{1}{2}.\frac{(a-c)^2}{b+d}$$

Si se divide el excedente del consumidor y del productor se obtiene lo siguiente:

$$Excedente\_relativo = \frac{\frac{b}{2}.\left(\frac{a-c}{d+b}\right)^2}{\frac{d}{2}.\left(\frac{a-c}{d+b}\right)^2}$$

$$Excedente\_relativo = \frac{\frac{b}{2}.}{\frac{d}{2}.} = \frac{b}{d}$$

donde los coeficientes "b" y "d" son las pendientes de la demanda y oferta, respectivamente. Así se observa que el excedente relativo del consumidor respecto al productor dependerá de las sensibilidades de la demanda y oferta en relación a cambios en el precio del bien.

6. Valor Presente De Un Ingreso Continuo

En empresas donde el ingreso está repartido a lo largo de un número de años futuros, en ocasiones es necesario calcular el valor presente de este ingreso, especialmente cuando una empresa puede escoger entre tasas alternativas para explotar estos recursos.

Como el ingreso se obtiene continuamente en un periodo determinado, es necesario utilizar descuentos continuos para determinar el valor presente.

Para calcular el valor presente de un ingreso (I) obtenido en (t) años futuros es igual Ie^{-rt} donde r = R/100, donde R es la tasa de interés nominal. Si f(t) es la tasa de utilidad en el tiempo "t", el valor presente de la utilidad total obtenida entre t = 0 y t = T, será:

El Valor presente = $\int_0^T f(t)e^{-rt}dt$

Además, se puede aplicar si la empresa paga la anualidad frecuentemente, se puede analizar como si se pagara en forma continua.

Ejemplos de aplicación

1. Una compañía minera debe decidir entre dos estrategias para la explotación de sus recursos. Se invirtió $12 millones en maquinarias, logrando producir una utilidad neta de $4 millones anuales, logrando una vida útil de 10 años. Alternativamente la empresa puede invertir $16 millones en maquinarias, mejorando su utilidad a $6 millones al año por un periodo de 8 años. Suponiendo que la tasa de interés nominal es de 10% ¿Qué estrategia deberá utilizar la empresa?

Solución:

La primera estrategia tiene una razón de utilidad f(x) = 4, su valor presente es (r = 0.1, T=10):

$$U1 = \int_0^{10} 4e^{-0.1t}\,dt - 12$$
$$U1 = \left[-40e^{-0.1t}\right]_0^{10} - 12$$
$$U1 = 40\left(1 - e^{-1}\right) - 12 = 40(0.6321) - 12$$
$$U1 = 25.284822 - 12 = \$13.2848 Millones$$

Con **la segunda estrategia**

$$U2 = \int_0^{8} 6e^{-0.1t}\,dt - 16$$
$$U2 = \left[-60e^{-01t}\right]_0^{8} - 16$$
$$U2 = 60\left(1 - e^{-08}\right) - 16 = 60\left(0.632121\right) - 16$$
$$U2 = 37.926726 - 16 = \$21.92726 Millones$$

La segunda estrategia es la más adecuada con una diferencia de \$8.64246 aproximadamente.

2. Una compañía minera puede escoger entre dos estrategias para utilizar sus recursos. La primera implica un costo inicial de \$25 millones, produciendo una utilidad neta de \$10 millones durante los próximos 20 años. La segunda estrategia representa un costo inicial de \$60 millones y producirá una utilidad neta de \$20 millones anuales durante un periodo de 10 años. Determine el valor presente de cada alternativa, suponiendo que la tasa de descuento nominal es 10%. ¿Cuál es la estrategia más óptima?

Solución:

Primera alternativa:

$$U1 = \int_0^{20} 10e^{-0.1t}\,dt - 25$$
$$U1 = 10\left[\frac{e^{-0.1t}}{-0.1}\right]_0^{20} - 25$$
$$U1 = 10(-3.678 + 10) - 25$$
$$U1 == -36.78 + 10 - 25 = \$38.22 Millones$$

Segunda alternativa:

$$U2 = \int_0^{10} 20e^{-0.1t}\,dt - 60$$
$$U2 = 20\left[\frac{e^{-0.1t}}{-0.1}\right]_0^{10} - 60$$
$$U2 = 20(-3.67879 + 10) - 60$$
$$U2 = -73.5758 + 200 - 60 = \$66.424 Millones$$

La mejor alternativa es la segunda.

Ejercicios propuestos

Problemas de Aplicación de Integración por Parte

1. Suponga que el valor del petróleo producido por una pieza de un equipo de extracción se considera un flujo continuo de ingreso con una tasa de flujo anual (en dólares por año) en el momento t, en años, dado por $f(t)=300\ 000 - 2500t$, y el dinero crece 8% compuesto continuamente. Encuentre el valor presente de la pieza.

2. Si la función oferta para x unidades de una mercancía es $p=30 + 50\ ln(2x+1)^2$ pesos ¿cuál es el superávit del productor en x=30?

3. Si la función de costo marginal para x unidades de un producto es $C'(x)=1 + 3\ln(x+1)$ miles de pesos por unidad, y si el costo fijo es de $100 mil, encuentre la función costo total.

4. Suponga que se puede considerar la producción de una máquina como flujo continuo de ingreso con una tasa de flujo anual en el tiempo t, dada por $f(t)=10\ 000 - 500t$ miles de pesos por año. Si el dinero crece a una tasa de 10% compuesto continuamente encuentre el valor presente de la máquina para los próximos 5 años.

6. Suponga que la producción de una máquina que se utiliza para extraer carbón se considera como un flujo continuo de ingreso con una tasa de flujo anual en el momento t dada por f(t)=280 000 -14 000t miles de pesos por año. Si el dinero crece a una tasa de 7% compuesto continuamente, encuentre el valor presente de esta máquina los próximos 8 años.

6. Suponga que el ingreso de una empresa de acceso a Internet es un flujo continuo de ingreso con una tasa anual dada por $f(t)=100te^{-0.1t}$ en millones de pesos por año. Encuentre el ingreso total durante los próximos 10 años.

7. Suponga que la curva de Lorenz para la distribución de ingresos de cierto país está dada por $y = xe^{(x-1)}$ Encuentre el coeficiente de Gini para el ingreso.

8. Una empresa tiene un costo marginal por unidad de su producto dado por

$$C'(x) = \frac{5000\ln(x+20)}{(x+20)^2}$$

donde x es el nivel de producción. Si los costos fijos ascienden a $2000, determine la función costo.

9. Calcular el exceso de oferta y el exceso de demanda para las curvas de demanda y oferta dadas. Función de demanda: $p_1(x) = 1000 - 0{,}4x^2$. Función de oferta: $p_2(x) = 42x$

10. Se espera que la compra de una nueva máquina genere un ahorro en los costos de operación. Cuando la máquina tenga x años de uso la razón de ahorro sea de f(x) pesos al año donde f(x) □ 1000 + 5000x.

a) ¿Cuánto se ahorra en costos de operación durante los primeros seis años?

b) Si la máquina se compró a $ 67500 ¿cuánto tiempo tardará la máquina en pagarse por sí sola?

11. Una compañía considera que la compra de una nueva maquinaria tiene un costo de $6000. Se determina que la máquina ahorrará dinero a la compañía a una tasa de 175 (5+t) dólares anuales en un tiempo *t* después de la adquisición. ¿Se pagará la máquina a sí misma durante los próximos 6 años?

12. Una compañía minera puede optar entre dos estrategias para explotar sus recursos. La primera implica un costo inicial de $27 millones y producirá una utilidad neta de $11 millones anuales durante los próximos 20 años. La segunda representa un costo inicial de $65 millones y producirá una utilidad neta de $22 millones anuales por un periodo de 10 años. Calcular el valor presente de estas dos estrategias suponiendo una tasa de descuento nominal de 10%. ¿Cuál es la mejor estrategia?

13. Carlos E. está considerando la compra de un nuevo dispositivo de ensamblado, con un costo de $60,000. Él estima que el equipo ahorrará dinero a la compañía a una tasa de 2500 (4+t) pesos anuales, en un tiempo *t* después de haberse adquirido. ¿Se pagará la máquina a sí misma durante los próximos 4 años?

ÁPENDICE I

TABLA DE DERIVADAS ESTÁNDAR

1. Fórmulas Básicas

2. La derivada de una constante es cero $\frac{dc}{dx}=0$

3. La derivada de la variable $\frac{dx}{dx}=1$

4. $\frac{d}{dx}(u+v-w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}-\frac{dw}{dx}$ (Fórmula de la suma y resta de funciones)

5. La derivada de una constante por una función $\frac{d}{dx}(cv)=c\frac{dv}{dx}$

6. $\frac{d}{dx}(uv)=u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}$ (Formula del producto)

7. $\frac{d}{dx}\left(v^n\right)=nv^{n-1}\cdot\frac{dv}{dx}$ en particular: $\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$ (Formula de la potencia)

8. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\cdot\frac{du}{dx}-u\cdot\frac{dv}{dx}}{v^2}$ en particular: $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right)=\frac{1}{c}\cdot\frac{du}{dx}$ (Formula del cociente)

9. $\frac{d}{dx}\left(e^v\right)=e^v\cdot\frac{dv}{dx}$

2. Funciones Exponenciales y Logarítmicas

10. $\frac{d}{dx}(\log_a v)=\frac{\log_a e}{v}\cdot\frac{dv}{dx}$ en particular: $\frac{d}{dx}(\log_e v)=\frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx}$

11. $\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{dv}{dx}$

12. $\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=e^x\cdot\frac{dv}{dx}$

13. $\frac{d}{dx}\left(a^v\right)=a^v\cdot\log_e a\cdot\frac{dv}{dx}$ en particular: $\frac{d}{dx}\left(e^v\right)=e^v\cdot\frac{dv}{dx}$

14. $\frac{d}{dx}\left(u^{v}\right)=vu^{v-1}\cdot\frac{du}{dx}+\log_{e}u\cdot u^{v}\cdot\frac{dv}{dx}$

3. Derivadas de Funciones Trigonométricas

14. $\frac{d}{dx}(Senv)=Cosv\cdot\frac{dv}{dx}$

15. $\frac{d}{dx}(Cosv)=-Senv\cdot\frac{dv}{dx}$

16. $\frac{d}{dx}(Tanv)=Sec^{2}v\cdot\frac{dv}{dx}$

17. $\frac{d}{dx}(Cotv)=-Csc^{2}v\cdot\frac{dv}{dx}$

18. $\frac{d}{dx}(Secv)=Secv\cdot Tanv\cdot\frac{dv}{dx}$

19. $\frac{d}{dx}(Cscv)=-Cscv\cdot Cotv\cdot\frac{dv}{dx}$

Derivadas de las Funciones

Trigonométricas Inversas

20. $\frac{d}{dx}(arcSenv)=\frac{1}{\sqrt{1-v^{2}}}\cdot\frac{dv}{dx}$

21. $\frac{d}{dx}(arcCosv)=-\frac{1}{\sqrt{1-v^{2}}}\cdot\frac{dv}{dx}$

22. $\frac{d}{dx}(arcTanv)=\frac{1}{1+v^{2}}\cdot\frac{dv}{dx}$

23. $\frac{d}{dx}(arcCotv)=-\frac{1}{1+v^{2}}\cdot\frac{dv}{dx}$

24. $\frac{d}{dx}(arcSecv)=\frac{1}{v\sqrt{v^{2}-1}}\cdot\frac{dv}{dx}$

25. $\frac{d}{dx}(arcCscv)=-\frac{1}{v\sqrt{v^{2}-1}}\cdot\frac{dv}{dx}$

4. Regla de la Cadena

26. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$ donde *y* es una función de *v* y *v* a su vez es una función de *x*.

5. Derivadas de Funciones Hiperbólicas

27. $\frac{d}{dx}\left(Senhv\right) = Coshv \cdot \frac{dv}{dx}$

28. $\frac{d}{dx}\left(Coshv\right) = Senhv \cdot \frac{dv}{dx}$

29. $\frac{d}{dx}\left(Tanhv\right) = Sech^2 v \cdot \frac{dv}{dx}$

30. $\frac{d}{dx}\left(Cothv\right) = -Csch^2 v \cdot \frac{dv}{dx}$

31. $\frac{d}{dx}\left(Sechv\right) = -Sechv \cdot Tanhv \cdot \frac{dv}{dx}$

32. $\frac{d}{dx}\left(Cschv\right) = -Cschv \cdot Cothv \cdot \frac{dv}{dx}$

Derivadas de Funciones Hiperbólicas Inversas

33. $\frac{d}{dx}\left(arcSenhv\right) = \frac{1}{\sqrt{v^2+1}} \cdot \frac{dv}{dx}$

34. $\frac{d}{dx}\left(arcCoshv\right) = \frac{1}{\sqrt{v^2-1}} \cdot \frac{dv}{dx}$

35. $\frac{d}{dx}\left(arcTanhv\right) = \frac{1}{1-v^2} \cdot \frac{dv}{dx}$

36. $\frac{d}{dx}\left(arcCothv\right) = \frac{1}{1-v^2} \cdot \frac{dv}{dx}$

37. $\frac{d}{dx}\left(arcSechv\right) = -\frac{1}{v\sqrt{1-v^2}} \cdot \frac{dv}{dx}$

38. $\frac{d}{dx}\left(arcCschv\right)=-\frac{1}{v\sqrt{1+v^2}}\cdot\frac{dv}{dx}$

6. Derivadas Sucesivas

37. $\frac{d^n}{dx^n}\left(uv\right)=\frac{d^n u}{dx^n}\cdot v+n\cdot\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\cdot\frac{dv}{dx}$

$$+\frac{n\left(n-1\right)}{2!}\cdot\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\cdot\frac{d^2 v}{dx^2}+.....$$

$+n\cdot\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}}+u\cdot\frac{d^n v}{dx^n}$ también conocida como la fórmula de Leibnitz.

APÉNDICE II

Tabla de Integrales

1. Integrales fundamentales

1. $\int dx = x$

2. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$

3. $\int (u+v-w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx$

4. $\int x^m dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}$ cuando $m \neq -1$

5. $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln x$

2. Integrales algebraicas racionales que incluyen (ax+b)

6. $\int (ax+b)^m dx = \dfrac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)}$ cuando $m \neq -1$

7. $\int \dfrac{1}{ax+b} dx = \dfrac{1}{a} \ln(ax+b)$

8. $\int \dfrac{xdx}{ax+b} = \dfrac{1}{a^2}(ax+b-b\ln(ax+b))$

9. $\int \dfrac{xdx}{(ax+b)^2} = \dfrac{1}{a^2}\left(\dfrac{b}{ax+b} + \ln(ax+b)\right)$

10. $\int \dfrac{x^2dx}{ax+b} = \dfrac{1}{a^3}\left(\dfrac{(ax+b)^2}{2} - 2b(ax+b) + b^2 \ln(ax+b)\right)$

11. $\int \dfrac{x^2dx}{(ax+b)^2} = \dfrac{1}{a^3}\left(ax+b - \dfrac{b^2}{ax+b} - 2b\ln(ax+b)\right)$

12. $\int \dfrac{dx}{x(ax+b)} = \dfrac{1}{b}\ln\left(\dfrac{x}{ax+b}\right)$

13. $\int \dfrac{dx}{x(ax+b)^2} = \dfrac{1}{b(ax+b)} + \dfrac{1}{b^2}\ln\left(\dfrac{x}{ax+b}\right)$

14. $\int \dfrac{dx}{x^2(ax+b)} = -\dfrac{1}{bx} + \dfrac{a}{b^2}\ln\left(\dfrac{ax+b}{x}\right)$

15. $\int \dfrac{dx}{x^2(ax+b)^2} = -\dfrac{2ax+b}{b^2x(ax+b)} + \dfrac{2a}{b^2}\ln\left(\dfrac{ax+b}{x}\right)$

16. $\int \dfrac{dx}{x^2+b^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$

17. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) = -\frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{a}{x}\right) \int \frac{dx}{ax^2+b}$

18. $\int \frac{dx}{\left(ax^2+b\right)^m} = \frac{x}{2(m-1)b\left(ax^2+b\right)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)b}\int \frac{dx}{\left(ax^2+b\right)^{m-1}}$ cuando $m \neq -1$

19. $\int \frac{x\,dx}{\left(ax^2+b\right)^m} = -\frac{1}{2(m-1)a\left(ax^2+b\right)^{m-1}}$ cuando $m \neq -1$

20. $\int \frac{x\,dx}{ax^2+b} = \frac{1}{2a}\ln\left(ax^2+b\right)$

21. $\int \frac{x^2dx}{ax^2+b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{ax^2+b}$

22. $\int \frac{x^2dx}{\left(ax^2+b\right)^m} = -\frac{x}{2(m-1)a\left(ax^2+b\right)^{m-1}} + \frac{1}{2(m-1)a}\int \frac{dx}{\left(ax^2+b\right)^{m-1}}$ cuando $m \neq -1$

23. $\int \frac{dx}{ax^3+b} = \frac{k}{3b}\left(\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2x-k}{k\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\frac{k+x}{\sqrt{k^2-kx+x^2}}\right)\right)$ donde $k = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$

24. $\int \frac{x\,dx}{ax^3+b} = \frac{k}{3ak}\left(\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2x-k}{k\sqrt{3}}\right) - \ln\left(\frac{k+x}{\sqrt{k^2-kx+x^2}}\right)\right)$ donde $k = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$

25. $\int \frac{dx}{x\left(ax^n+b\right)} = \frac{1}{bn}\ln\left(\frac{x^n}{ax^n+b}\right)$

Suponiendo que $X = ax^2+bx+c$ y que $q = b^2-4ac$

26. $\int \frac{dx}{X} = \frac{1}{\sqrt{q}}\ln\left(\frac{2ax+b-\sqrt{q}}{2ax+b+\sqrt{q}}\right)$ cuando $q > 0$

27. $\int \frac{dx}{X} = \frac{2}{\sqrt{-q}}\tan^{-1}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-q}}\right)$ cuando $q < 0$

3. Integrales que involucran expresiones del tipo $\sqrt{ax+b}$

$$\left.\begin{array}{l} \int \sqrt{ax+b}\,dx \\ \int \dfrac{dx}{\sqrt{ax+b}} \\ \int (ax+b)^n \sqrt{ax+b}\,dx \\ \int \dfrac{dx}{(ax+b)^n \sqrt{ax+b}} \end{array}\right\} \text{Todas estas expresiones pueden ser integradas usando la fórmula 19}$$

28. $\int x\sqrt{ax+b}\,dx = \dfrac{2(3ax-2b)\sqrt{(ax+b)^3}}{15a^2}$

29. $\int x^2\sqrt{ax+b}\,dx = \dfrac{2\left(15a^2x^2-12abx+8b^2\right)\sqrt{(ax+b)^3}}{105a^3}$

30. $\int x^m\sqrt{ax+b}\,dx = \dfrac{2}{a(2m+3)}\left(x^m\sqrt{(ax+b)^3}-mb\int x^{m-1}\sqrt{ax+b}\,dx\right)$

31. $\int \dfrac{\sqrt{ax+b}\,dx}{x} = \begin{cases} 2\sqrt{ax+b}-2\sqrt{-b}\ln\dfrac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}} & \text{si } b>0 \\ 2\sqrt{ax+b}-2\sqrt{-b}\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{ax+b}{-b}} & \text{si } b<0 \\ \text{use la fórmula 4} & \text{si } b=0 \end{cases}$

32. $\int \dfrac{\sqrt{ax+b}\,dx}{\mathrm{x}^{\mathrm{m}}} = -\dfrac{1}{(m-1)^b}\left(\dfrac{\sqrt{(ax+b)}^3}{x^{m-1}}+\dfrac{(2m-5)a}{2}\int\dfrac{\sqrt{ax+b}\,dx}{x^{m-1}}\right)$ cuando $m \neq -1$

33. $\int \dfrac{xdx}{\sqrt{ax+b}} = \dfrac{2(ax-2b)}{3a^2}\sqrt{ax+b}$

34. $\int \dfrac{x^2dx}{\sqrt{ax+b}} = \dfrac{2\left(3a^2x^2-4abx+8b^2\right)}{15a^3}\sqrt{ax+b}$

35. $\int \dfrac{x^m dx}{\sqrt{ax+b}} = \dfrac{2}{a(2m+1)}\left(x^m\sqrt{ax+b}-mb\int\dfrac{x^{m-1}dx}{\sqrt{ax+b}}\right)$ cuando $m \neq 1/2$

36. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{b}} \ln \dfrac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}} & \text{si } b>0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{-b}} \tan^{-1}\sqrt{\dfrac{ax+b}{-b}} & \text{si } b<0 \\ \text{use la fórmula 4} & \text{si } b=0 \end{cases}$$

37. $$\int \frac{dx}{x^m\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{(m-1)bx^{m-1}} - \frac{(2m-3)a}{(2m-2)b}\int \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{ax+b}} \text{ cuando } m \neq 1$$

4. Integrales que involucran expresiones del tipo $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ y $\sqrt{a^2 - x^2}$.

(Estas integrales son casos especiales de las integrales más generales dadas en la siguiente sección.)

38.* $$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)\right]$$

39. $$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 sen^{-1}\frac{x}{a}\right)$$

40.* $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$$

41. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = sen^{-1}\frac{x}{a}$$

42. $$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2 \pm a^2\right)^3}$$

43.* $$\int x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{4}\sqrt{\left(x^2 \pm a^2\right)^3} \mp \frac{a^2}{8}\left[x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln\left(x\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)\right]$$

44. $$\int x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = -\frac{1}{3}\sqrt{\left(a^2 - x^2\right)^3}$$

45. $$\int x^2\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = -\frac{x}{4}\sqrt{\left(a^2 - x^2\right)^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 sen^{-1}\frac{x}{a}\right)$$

46.* $$\int \frac{\sqrt{a^2 \pm x^2}\, dx}{x} = \sqrt{a^2 \pm x^2} - a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 \pm x^2}}{x}$$

47. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}\,dx}{x} = \sqrt{x^2-a^2} - a\cos^{-1}\frac{a}{x}$

48* $\int \frac{\sqrt{a^2 \pm x^2}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{a^2 \pm x^2}}{x} + \ln\left(x+\sqrt{a^2 \pm x^2}\right)$

En las fórmulas marcadas con ``*´´, se puede reemplazar

$\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$ por $\sinh^{-1}\frac{x}{a}$

$\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$ por $\cosh^{-1}\frac{x}{a}$

$\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right)$ por $\sinh^{-1}\frac{a}{x}$

$\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$ por $\cosh^{-1}\frac{a}{x}$

49. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - sen^{-1}\frac{x}{a}$

50. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}$

51. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2}$

52.* $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$

53. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}sen^{-1}\frac{x}{a}$

54. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\cos^{-1}\frac{a}{x}$

55.* $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 \pm x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2 \pm x^2}}{x}\right)$

56. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\frac{\sqrt{a^2 \pm x^2}}{a^2 x}$

57. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x}$

58.* $\int \sqrt{\left(a^2 \pm x^2\right)^3}\,dx = \frac{1}{4}\left[x\sqrt{\left(a^2 \pm x^2\right)^3} \pm \frac{3a^2 x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)\right]$

59. $\int \sqrt{\left(a^2 - x^2\right)^3}\,dx = \frac{1}{4}\left[x\sqrt{\left(a^2 - x^2\right)^3} + \frac{3a^2 x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{3a^4}{2} sen^{-1}\frac{x}{a}\right]$

60. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2 \pm a^2\right)^3}} = \frac{\pm x}{a^2\sqrt{x^2 \pm a^2}}$

61. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(a^2 - x^2\right)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 - x^2}}$

5. Integrales que involucran expresiones del tipo $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

Sea $X = ax^2 + bx + c$ y $q = b^2 - 4ac$

62. $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(\sqrt{X} + \frac{2ax+b}{2\sqrt{a}}\right) & \text{si } a > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-a}} sen^{-1}\frac{\left(-2ax-b\right)}{\sqrt{q}} & \text{si } a < 0 \end{cases}$

63. $\int \frac{xdx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{a} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$

64. $\int \frac{(mx+n)dx}{\sqrt{X}} = \frac{m\sqrt{X}}{a} + \frac{2an - bm}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$

65. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{X}} = \frac{(2ax - 3b)\sqrt{X}}{4a^2} + \frac{3b^2 - 4ac}{8a^2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$

66. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{c}} \ln\left(\frac{\sqrt{X}+\sqrt{c}}{x} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right) & \text{si } c > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-c}} sen^{-1} \frac{bx+2c}{x\sqrt{q}} & \text{si } c > 0 \\ -\frac{2\sqrt{X}}{bx} & \text{si } c = 0 \end{cases}$$

67. $$\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{X}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} \ln\left[\frac{\sqrt{k}-m\sqrt{X}}{mx+n} + \frac{bm-2an}{2\sqrt{k}}\right] & \text{si } k > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-k}} sen^{-1}\left[\frac{(bm-2an)(mx+n)+2k}{m(mx+n)\sqrt{q}}\right] & \text{si } k < 0 \\ -\frac{2m\sqrt{X}}{(bm-2an)(mx+n)} & \text{si } k = 0 \end{cases}$$ cuando

$$k = an^2 - bmn + cm$$

68. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{cx} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$$

69. $$\int \sqrt{X}\,dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{X}}{4a} - \frac{q}{8a}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

70. $$\int x^2\sqrt{X}\,dx = \frac{(6ax-5b)X\sqrt{X}}{24a^2}$$

$$+\frac{(5b^2-4ac)(2ax+b)\sqrt{X}}{64a^3} - \frac{(5b^2-4ac)q}{128a^3}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

71. $$\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x} = \sqrt{X} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}} + c\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$$

72. $$\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{mx+n} = \frac{\sqrt{X}}{m} + \frac{bm-2an}{2m^2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$+\frac{an^2bmn+cm^2}{m^2}\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{X}}$$

73. $$\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} + a\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

74. $\int \frac{dx}{X\sqrt{X}} = -\frac{2(ax+b)}{q\sqrt{X}}$

75. $\int X\sqrt{X}\,dx = \frac{2(2ax+b)X\sqrt{X}}{8a} - \frac{3q(2ax+b)\sqrt{X}}{64a^2}$

$+\frac{3q^2}{128a^2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$

6. Miscelánea de Integrales Irracionales

76. $\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx = \frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2}\,sen^{-1}\frac{x-a}{a}$

77. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \cos^{-1}\frac{a-x}{a}$

78. $\int \sqrt{\frac{mx+n}{ax+b}}\,dx = \int \frac{(mx+n)dx}{\sqrt{amx^2+(bm+an)x+bn}}$ y entonces use la fórmula 64

7. Integrales Logarítmicas

79. $\int \log_a x\,dx = x\log_a \frac{x}{e}$

80. $\int \ln x\,dx = x(\ln x - 1)$

81. $\int x^m \log_a x\,dx = x^{m+1}\left(\frac{\log_a x}{m+1} - \frac{\log_a e}{(m+1)^2}\right)$

82. $\int x^m \ln x\,dx = x^{m+1}\left(\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2}\right)$

8. Integrales Exponenciales

83. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$

84. $\int e^x dx = e^x$

85. $\int xe^x dx = e^x(x-1)$

86. $\int x^m e^x dx = x^m e^x - m\int x^{m-1}e^x dx$

9. Integrales Trigonométricas

Nota: En las siguientes fórmulas, los números *m* y *n* son *enteros positivos*, a menos que sea otra la indicación.

87. $\int senx dx = -\cos x$

88. $\int sen^2 x dx = ½\left(x - senx\cos x\right)$

89. $$\int sen^n x dx = \begin{cases} \int \left(1-\cos^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}} senx dx & \text{si } n \text{ es impar} \\ \text{Use la expansión} & \\ \text{de } \left(1-\cos^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}} & \text{y luego la fórmula 73} \\ -\dfrac{sen^{n-1}x\cos x}{n} + \dfrac{n-1}{n}\int sen^{n-1}x dx & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

90. $$\int \frac{dx}{sen^n x} = \begin{cases} -\dfrac{\cos x}{(n-1)sen^{n-1}x} + \dfrac{n-2}{n-1}\int \dfrac{dx}{sen^{n-2}x} \\ \text{cuando } n \text{ es impar} \neq -1 \\ \int \csc^n x dx \\ \text{cuando } n \text{ es par} \end{cases}$$

91. $\int \cos x dx = senx$

92. $\int \cos^2 x dx = ½\left(x + senx\cos x\right)$

93. $$\int \cos^n x dx = \begin{cases} \int \left(1-sen^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}} \cos x dx & \text{si } n \text{ es impar} \\ \text{Use la expansión de} & \\ \left(1\text{-}\operatorname{sen}^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}} & \\ \dfrac{\cos^{n-1}x senx}{n} + \dfrac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

94. $$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \begin{cases} \dfrac{senx}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \dfrac{n-2}{n-1}\int \dfrac{dx}{\cos^{n-2} x} & \text{si } n \text{ es impar} \neq 1 \\ \int \sec^n x dx & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

95. $\int sen^n x \cos x dx = \frac{sen^{n+1} x}{n+1}$

96. $\int \cos^n x sen x dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}$

BIBLIOGRAFÍA

Arya, J. C. y Lardner, R. W. (2009). Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía. Pearson Educación, México. Quinta edición.

Ayres, F. (2004). Cálculo diferencial e integral, México, Mc. Graw Hill.

Chico, M. A. A. (2012). Integral Definida. Recuperado de www.academia.edu/9896936/LA_INTEGRAL_DEFINIDA

David, F. R. (2016). La formación en economía social. Análisis de la oferta universitaria de posgrado en españa/the training in social and solidarity economy. analysis of the university offer in spain. Revesco. Revista De Estudios Cooperativos, (121), 89-113. Recuperado de https://search.proquest.com/docview/1862311698?accountid=130858

Gavira, N. (2012). Cálculo diferencial e integral con aplicaciones a la economía, demografía y seguros. Recuperado de www.dynamics.unam.edu/NotasVarias/Actuarial.pdf

Haeussler, E. F & Pau, R. (2015). Matemáticas para Administración y Economía. México: Pearson Educación, 13 edición.

Hernández, E. (2009). Cálculo Diferencial e Integral con aplicaciones. Actualización, 2016, Costa Rica: Revista digital Matemática Educación e Internet. Recuperado de http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/

Hoffmann, L. D. (2006). Cálculo Aplicado para Administración, economía y Ciencias Sociales. McGrawHill, México. Octava edición.

Martínez, F. (2015). Análisis macroeconómico de los efectos de la liberalización financiera y comercial sobre el crecimiento económico de méxico, 1988-2011. Perfiles Latinoamericanos, 23(45), 79-104. Retrieved from https://search.proquest.com/docview/1784041346?accountid=130858

Marvin L. B. (2002). Cálculo para Ciencias Económico-Administrativas. Bogotá: Pearson Educación.

Mclero, I. (2010). Administración y Cálculo de tu empresa. Recuperado de tp://es.slideshare.net/quique1796/calculo-para-administracin?related=1

Ortiz-Bojacá, J. J. (2016). Mathematical modeling and matrix analytic accounting, accounting measuring, representation, and interpretation tools: Are these a challenge yet to be assumed by 'contametria' (account metrics) in the scientific development of accounting? is it assumed by. Cuadernos De Contabilidad, 17(43) Recuperado de https://search.proquest.com/docview/1923682523?accountid=130858

Ortiz, H. (1977). La integral Indefinida y Técnicas de integración. U.N.E.T. San Cristóbal- Venezuela.

Purcell, E. J. & Varberg, D. (1992). Cálculo Diferencial e Integral, México: Prentice Hall, Hispanoamericana. Recuperado de https://educacionmatematicaula.files.wordpress.com/2014/12/cc3a1lculo-diferencial-e-integral-purcellvarbergrigdon-novema-edicic3b3n-2007.pdf

Thomas, G. B, Jr. (2010). Cálculo una Variable. México: Pearson Educación, Decimosegunda edición.

Sandoval, L.I. (2011). Cuadernillo de apuntes Cálculo Integral. Tecnológico de Estudios Superiores del Oriente del Estado de México. La Paz, México.

Cálculo integral y sus aplicaciones en la empresa

Autor: Marco Antonio Jara Riofrío, Mgs.

ISBN: 978-9942-960-21-4

9 789942 960214

Universidad Ecotec