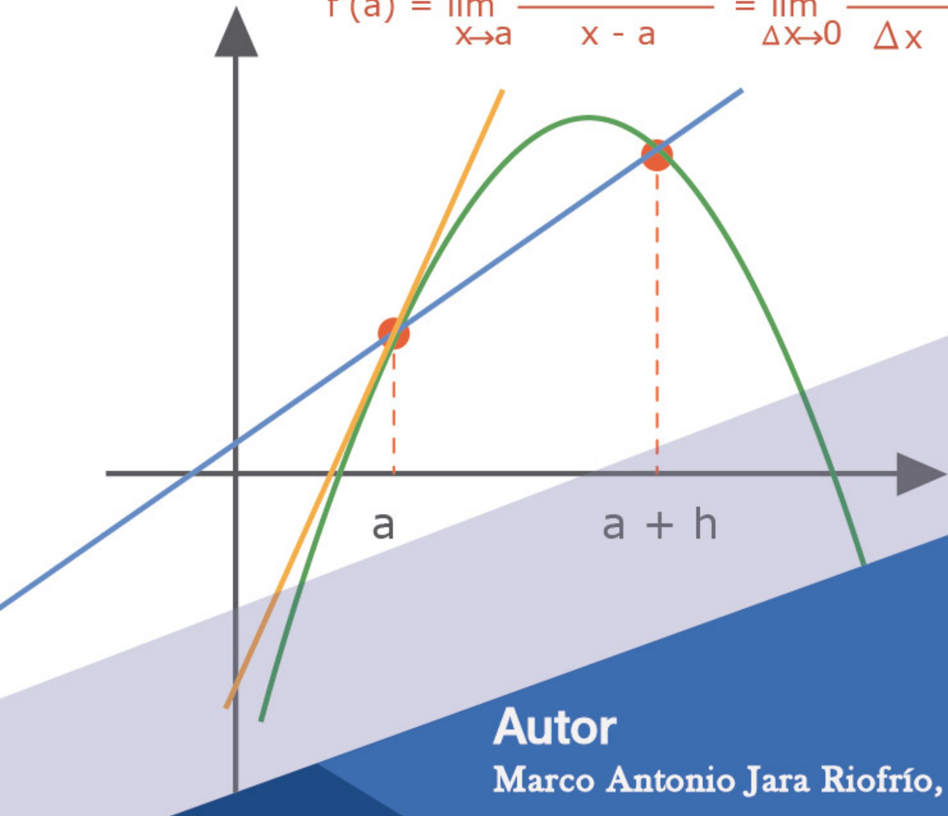
Universidad Ecotec

Aplicaciones de la Derivada en economía y administración

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$



Autor

Marco Antonio Jara Riofrío, Mgs.

APLICACIONES DE LA DERIVADA EN ECONOMÍA Y ADMINISTRACIÓN

AUTOR

Mgs. Marco Antonio Jara Riofrío

2016

Universidad Ecotec

TÍTULO

Aplicaciones de la Derivada en economía y administración.

AUTOR

Mgs. Marco Antonio Jara Riofrío

AÑO

2016

EDICIÓN

MSc. Ángela María González Laucirica - Departamento de Publicaciones

Andrea Estefanía Agurto Tandazo - Coedición

Universidad ECOTEC

ISBN

978-9942-960-06-1

NO. PÁGINAS

84

LUGAR DE EDICIÓN

Samborondón - Ecuador

DISEÑO DE CARÁTULA

Ing. Arnaldo Oscar Sánchez González - Departamento de Marketing y Relaciones Públicas

Universidad ECOTEC

TABLA DE CONTENIDOS

PRÓLOGO

La presente edición del texto, es un material didáctico de apoyo para el estudiante, en el proceso de enseñanza /aprendizaje de la asignatura Cálculo I, la cual se estudia como materia básica en el plan de estudio 2016 de la Universidad Tecnológica ECOTEC.

En el texto se presentan, nuevo conocimiento y una aplicación práctica de la utilización de la derivada en la economía y administración empresarial. Por lo que esta asignatura, junto con Cálculo II (Cálculo Integral) brinda posibilidades formativas para el desarrollo de las competencias disciplinares de matemáticas en este nivel educativo.

El contenido del texto es de nivel introductorio y elemental, desarrollando en aplicaciones sencillas, las experiencias que ha obtenido el autor durante los años de impartir la materia Calculo I y II, con casos experimentados por los estudiantes durante el proceso de la materia.

El programa del texto está enfocado por competencias, involucrando tanto al docente como al estudiante, utilizar una metodología activa y reflexiva, a través de actividades individuales y colectivas logrando que el estudiante adquiera destrezas para interpretar matemáticamente el entorno que le rodea, resolviendo problemas que competen al área Económica y Administrativa de una empresa, mejorando su capacidad de mejorar de estructurar y mejorar sus ideas, razonamientos argumentando sus resultados.

Bajo estas concepciones, el programa está estructurado, en una primera unidad. La Derivada, donde se estudia los límites como un concepto auxiliar para la introducción a la derivación, preparando al estudiante la comprensión del concepto de derivada de una función y la aplicación de límites. El concepto de derivada surgió históricamente a partir de encontrar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto dado (geometría) y determinar la velocidad instantánea de un móvil (física). Aquí es importante profundizar el concepto de derivada, aplicando en funciones sencillas y determinar las ecuaciones de la recta tangente y normal de una curva.

Segunda unidad. Reglas de derivación, se aplicarán las diferentes reglas y fórmulas que permitirán realizar la diferenciación en forma fácil y eficiente. Para lo cual se analizan funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas, ya que son necesarias para completar el estudio de las derivadas, se introduce el número y se completa con exponenciales y logaritmos que contengan como base e. Además, se introduce el concepto de relación implícita, donde el estudiante podrá derivar funciones cuando existen las dos variables, definiendo los procesos a seguir y resolver los problemas que desea resolver.

Tercera unidad. Análisis marginal, la derivada tiene muchas aplicaciones tanto en la economía como en la administración, denominándose tasas marginales, el término “marginal” se utiliza para indicar una derivada, significando una tasa de cambio. El estudiante aplica los conceptos de contabilidad, economía y administración para poder plantear problemas relacionados con las empresas.

Cuarta unidad. Aplicaciones prácticas de las derivadas. Los estudiantes abordaran el análisis y graficación de funciones mediante de los valores extremos (máximos y mínimos), los intervalos donde la función se vuelve creciente decreciente. Además, la aplicación práctica de máximos y mínimos en problemas reales que aparecen en las empresas.

En resumen, el estudio de las derivadas, es una oportunidad que tienen los estudiantes para sistematizar los conocimientos matemáticos y desarrolle competencias disciplinares para poder analizar y resolver problemas que en la vida empresarial pueden presentarse.

El contenido de este libro no ofrece sorpresa alguna y responde a un compromiso general tácito de lo que debe constituir un curso básico de Cálculo de funciones de una variable. La novedad, es buscarla el estilo, la exposición, y la gran cantidad de ejemplos y de ejercicios, en la forma detallada de presentación de los conceptos y de sus relaciones.

Este libro está escrito en un estilo intencionadamente sencillo, se trata abandonar del estilo presumido que se asignó hace algunos años y que actualmente existe en casos aislados. Escribir matemáticas es un arte que se va aprendiendo poco a poco y, tiene unas reglas básicas que deben ser respetadas en cualquier circunstancia. La regla principal indica Rea Nicolás Boileau (1636 - 1711) que dice así “lo que bien se concibe bien se expresa con palabras que acuden con presteza”. Que las palabras acudan con mayor o menor celeridad es algo anecdótico, pero lo positivo es que si algo no se concibe bien es imposible expresarlo con claridad. La primera condición necesaria para escribir matemáticas es entender con todo detalle, a ser posible desde varios puntos de vista diferentes y con distinto grado de generalidad, la génesis y evolución de los conceptos que se exponen, las sutilezas y dificultades de comprensión que encierran, los errores más frecuentes en su interpretación. Esa condición necesaria no es suficiente. Hay que exponer esos conceptos con palabras comprensibles para el lector a quien se dirigen, evitando tecnicismos innecesarios, y ello sin dejar de ser claro y preciso.

Agradezco, a los directivos de la Universidad ECOTEC, en especial el Sr. Decano de Facultad de Sistemas por el apoyo moral y técnico se puede plasmar este primer texto.
Al apoyo incondicional de mi esposa Lupita y mis hijos que con los incentivos y comprensión se logra obtener esta edición.
Estimados lectores, aunque este texto fue examinado minuciosamente, siempre se presentaran errores involuntarios, por lo que agradezco me hagan llegar, todos los errores que detecten, así como sus críticas y sugerencias para mejorar.

Atentamente,

Mgs. Marco Antonio Jara Riofrío

El autor.

INTRODUCCIÓN

El Cálculo Diferencial e Integral es una herramienta matemática que surgió en el siglo XVII para resolver algunos problemas de geometría y de física. El problema de hallar una recta tangente a la gráfica de una función en un punto dado y la necesidad de explicar racionalmente los fenómenos de la astronomía o la relación entre distancia, tiempo, velocidad y aceleración, estimularon la invención y el desarrollo de los métodos del Cálculo.

Sobresalieron entre sus iniciadores John Wallis, profesor de la Universidad de Oxford e Isaac Barrow, profesor de Newton en la Universidad de Cambridge, Inglaterra. Pero un método general de diferenciación e integración fue descubierto solo hacia 1665 por el Inglés Isaac Newton y posteriormente por Gottfried Wilhelm Von Leibniz, nacido en Leipzig, Alemania, por lo que a ellos se les atribuye la invención del Cálculo.

En la actualidad el Cálculo se aplica al estudio de problemas de diversas áreas de la actividad humana y de la naturaleza: la economía, la industria, la física, la química, la biología, para determinar los valores máximos y mínimos de funciones, optimizar la producción y las ganancias o minimizar costos de operación y riesgos.

En esta unidad de aprendizaje se estudiará formulas y técnicas básicas de derivación, para que el estudiante domine las reglas básicas de derivación y sean capaces de proceder directamente en las funciones matemáticas y su aplicación a la problemática empresarial en economía y administración, con expresión resultados.

LA DERIVADA

Definición.

La definición más común es lo referente a que la derivada es el límite del cociente entre incremento de una función y el de variable cuando esta tiende a cero.

Definición geométrica de la derivada.

Cálculo de ecuación de la recta tangente a una curva).

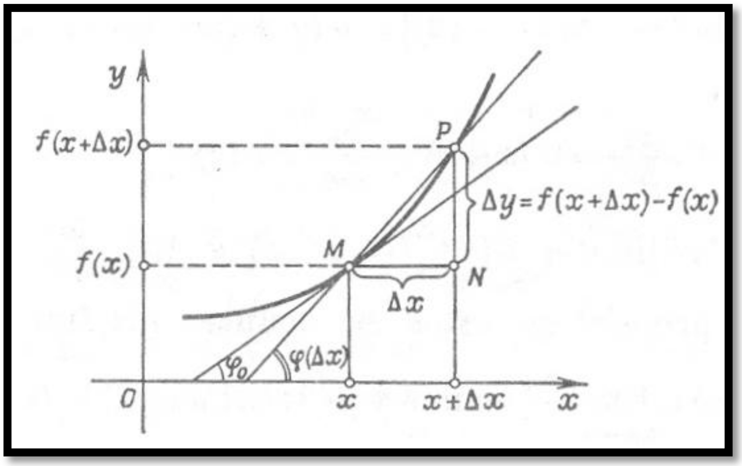
La definición geométrica de la derivada está relacionada directamente con la pendiente de una recta tangente a una curva que generalmente es de la forma $y = x^2$. Para lo cual es necesario seguir los siguientes pasos:

1. Graficar la función, tomando en cuenta el valor donde se quiere determinar la recta con su respectiva pendiente-
2. Aplicar la formula, aplicando los principios de límites.
3. La pendiente obtenida, determinar numéricamente reemplazando el x, del punto indicado.
4. Determinar la ecuación de la recta $y = mx + b$.Si la ecuación es Tangente a la curva, se utiliza la ecuación punto-pendiente: $\boxed{y - y_1 = m.(x - x_1)}$
5. Cuando la ecuación es Normal a la curva, la pendiente será:

$$m \cdot m_1 = -1 \implies m_1 = \frac{-1}{m}$$

Se utiliza la formula $\boxed{y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)}$

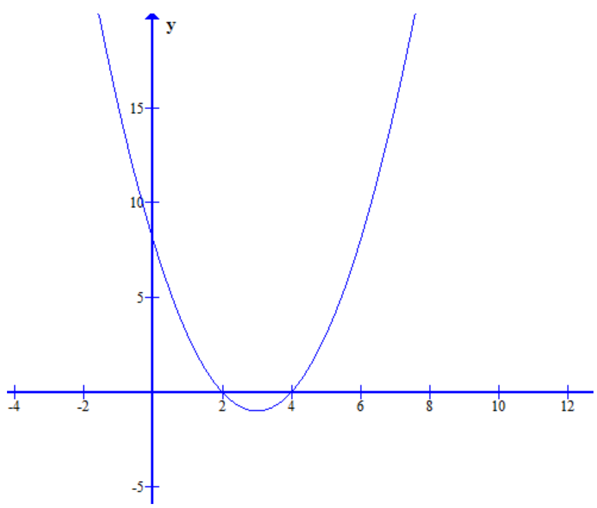
Si f ´(a) = 0, la recta tangente será horizontal y de ecuación y =f(a). En éste caso la recta normal es vertical y de ecuación x = a.



En otros términos, la derivada de f es una función cuyo valor en X1 = Xes la pendiente (m = tang θ) de la recta tangente a y = f(x) en x1 = x.

Ejercicios resueltos.

1. Hallar la derivada y la ecuación de la recta Tangente y Normal a la curva en el punto dado, aplicando el principio de límites $f(x) = x^2 - 6x + 8$ en el punto x=1



$$m = Lim_{\Delta x \to 0} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 \ - 6x - 6\Delta x + 8 - x^2 \ + 6x - 8}{\Delta x}$$

$$m = Lim_{\Delta x \to 0} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2 \ - 6\Delta x}{\Delta x}$$

$$m = Lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta x(2x + \Delta x - 6)}{\Delta x} = 2x + \Delta x - 6 = 2x - 6$$

La derivada de la función será $m = 2x - 6$

La ecuación de la recta tangente será:

Determino el valor numérico de la pendiente $\begin{aligned} m &= (1)^2 - 6(1) + 8 \\ m &= 3 \end{aligned}$

Aplicando la fórmula de la ecuación de la recta $\boxed{\boldsymbol{y - y_1 = m.(x - x_1)}}$ se obtiene:

$$y - 3 = -4.(x - 1)$$
$$y = -4x + 4 + 3$$
$$y = -4x + 7$$

La ecuación de la recta normal es:

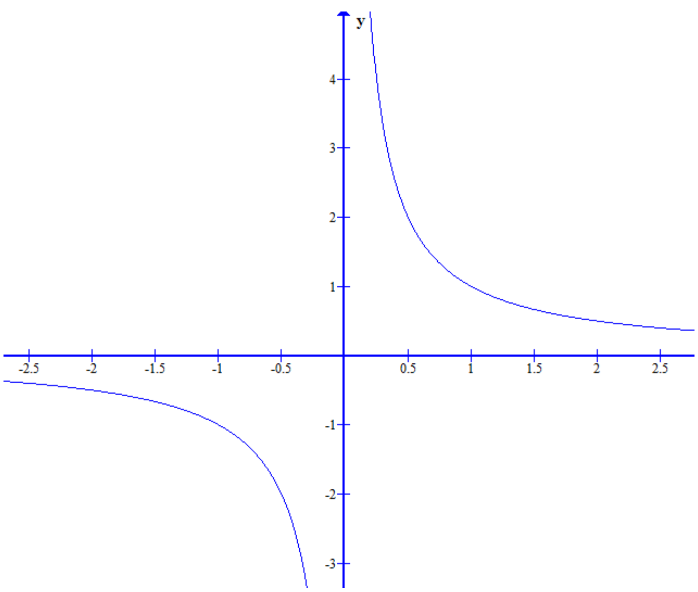
$$y - 3 = -\left(\frac{1}{-4}\right)(x - 1)$$
$$y - 3 = \frac{1}{4}(x - 1)$$
$$4y - 12 = x - 1$$
$$y = \frac{x + 11}{4}$$

2. Hallar la derivada y la ecuación de la recta Normal a la curva en el punto dado, aplicando el principio de límites

$f(x) = \frac{1}{x}$ En x= 1

Existe una asíntota, porque la variable se encuentra en el denominador y se encuentra ubicada en x=0

Asíntota, son rectas en que la función se aproxima indefinidamente, cuando una de las variables tiende al infinito.



$$m = Lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\frac{1}{(x+\Delta x)} - \frac{1}{x}}{\Delta x}$$

La derivada de la función es el valor que se obtenga de la pendiente.

$$m = Lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\frac{x - x - \Delta x}{(x+\Delta x)x}}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{(x+\Delta x)x}}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{(x+\Delta x)x\Delta x} = \frac{1}{x^2 + x\Delta x} = \frac{1}{x^2}$$

$$m = \frac{1}{1} = 1$$

La ecuación de la recta Normal será:

$$y - 1 = -\left(\frac{1}{1}\right)(x-1)$$
$$y - 1 - = -(x-1)$$
$$y = -x + 2$$

3. Hallar la derivada y la ecuación de la recta Normal a la curva en el punto dado, aplicando el principio de límites

$$f(x) = 3x^2$$
$$x = 2$$
$$y = 12$$

$$m = Lim_{\Delta x \to 0} = \frac{3(x+\Delta x)^2 - 3x^2}{\Delta x}$$

$$m = Lim_{\Delta x \to 0} = \frac{3(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - 3x^2}{\Delta x}$$

$$m = Lim_{\Delta x \to 0} = \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 3x^2}{\Delta x} = \frac{6x\Delta x + 3\Delta x^2}{\Delta x} = \frac{3\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x$$

$m = 6x \qquad m = 12$

La ecuación de la recta Normal:

$$y - y_1 = m.(x - x_1)$$

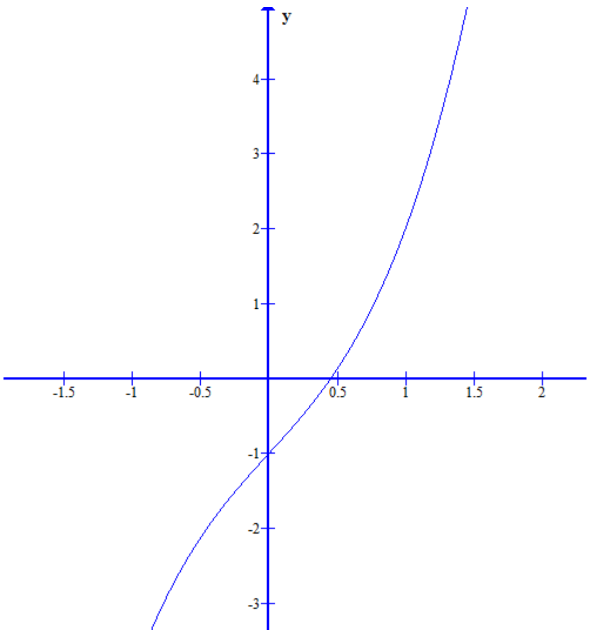
$$y - 12 = 12.(x - 2)$$
$$y = 12x - 24 + 12$$
$$y = 12x - 12$$

La ecuación de la recta Tangente:

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}.(x - x_1)$$
$$y - 12 = -\frac{1}{12}(x - 2)$$
$$12y - 24 = -x + 2$$
$$y = \frac{-x + 26}{12}$$

4. Determinar la derivada y la ecuación de la tangente y normal aplicando el principio de límites de la función: F (x): x^3+2x-1; x=-2

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	-34	-13	-4	-1	2	11	32



Lim = $(x+\Delta x)^3 + 2(x+\Delta x)-1 - (x^3+2x-1) / \Delta x$

$\Delta x \to 0$

Lim = $x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 2x+2\Delta x - 1 - x^3 - 2x + 1 / \Delta x$

$\Delta x \to 0$

Lim = $3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 2\Delta x / \Delta x$

$\Delta x \to 0$

Lim = $\Delta X (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 + 2) / \Delta x$

$\Delta x \to 0$

Lim = $3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 + 2$

$\Delta x \to 0$

Lim = $3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 + 2$; $X= - 2$

$\Delta x \to$

Lim= $3 (-2)^2 + 2$

$\Delta x \to 0$

m=14

La ecuación de la recta tangente:

$$y - y_1 = m.(x - x_1)$$

y – (-13) = 14 (x – (-2))

y + 13= 14(x + 2)

y + 13 = 14x + 38

y= 14x + 38 – 13

y = 14x + 25

La ecuación de la recta normal:

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}.(x - x_1)$$

y + 13 = -1 / 14 (x + 2)

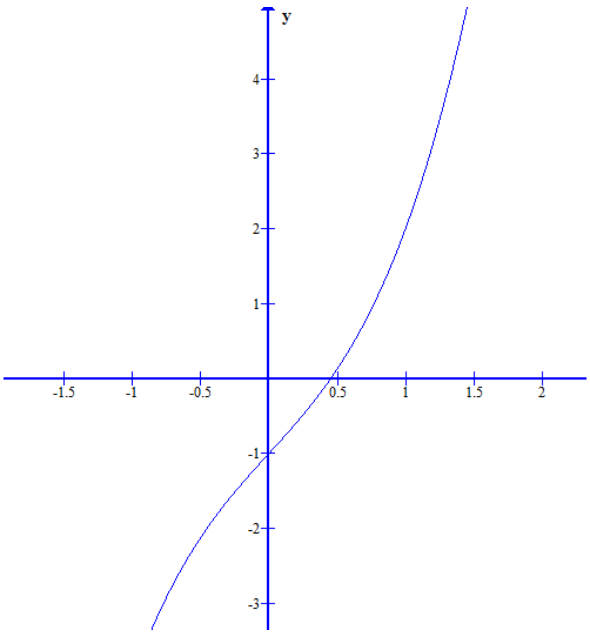
y + 13 = -(x+2) / 14

y = (-(x + 2) / 14) – 13

y = (-14x – 220) / 14

5. Determinar la derivada y la ecuación de la tangente y normal aplicando el principio de límites de la función: F(x): x^3+2x-1; x=-2

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	22	9	0	-5	-6	-3	4



Lim = 2(x + ∆x) ^2 – 3(x + ∆x) – 5 – (2x^2 – 3x – 5) / ∆x

∆x->0

Lim = 2(x^2 + 2x∆x + ∆x^2) – 3x - 3∆x – 5 – 2x^2 + 3x + 5) / ∆x

∆x->0

Lim = 2x^2 + 4x∆x + 2∆x^2 – 3x - 3∆x – 5 – 2x^2 + 3x + 5 / ∆x

∆x->0

Lim = 4x∆x + 2∆x^2 - 3∆x / ∆x

∆x->0

Lim = 4x + 2∆x - 3

∆x->0

m=1

La ecuación de la recta tangente:

$$y - y_1 = m.(x - x_1)$$

y – (-5) = -3 (x – 0)

y + 5 = -3(x - 0)

y + 5 = -3x

y= -3x - 5

La ecuación de la recta normal:

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}.(x - x_1)$$

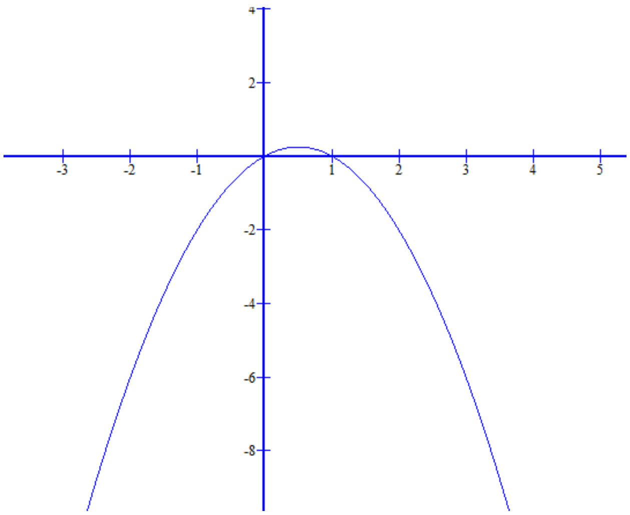
y + 5 = -1 /-3 (x - 0)

y + 5 = 1 / 3 (x – 0)

y = (x / 3) – 5.

6. Determinar la derivada y la ecuación de la tangente y normal aplicando el principio de límites de la función(x): x (1 – x); x=-1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-12	-6	-2	0	0	-2	-6



Lim = (x + Δx) – (x + Δx) ^2 – (x – x^2) / Δx

Δx->0

Lim = (x + Δx) – (x^2 + 2xΔx + Δx^2) – (x – x^2) / Δx

Δx->0

Lim = x + Δx – x^2 - 2xΔx - Δx^2 – x + x^2 / Δx

Δx->0

Lim = Δx - 2xΔx - Δx^2 / Δx

Δx->0

Lim = 1 – 2x - Δx

Δx->0

m = 3

Ecuación de recta tangente:

$y - y_1 = m.(x - x_1)$

y – (-2) = 3 (x – 0)

y + 2 = 3(x - 0)

y + 2 = 3x

y= 3x - 2

Ecuación de la recta normal:

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}.(x - x_1)$$

$$y + 2 = -\frac{1}{3}.(x - 0)$$

$$3y + 6 = -x$$

7. Hallar la derivada y la ecuación de la recta Normal a la curva en el punto dado, aplicando el principio de límites

Se calcula la derivada de la función dada en el punto que se indica.
Aplicando la propia definición se tiene que:

$$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(2^3 + 3.2^2h + 3.2h^2 + h^3) - 2^3}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3.2^2h + 3.2h^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h.(3.2^2 + 3.2h + h^2)}{h} = \lim_{h\to 0}(3.2^2 + 3.2h + h^2) = 3.2^2 = 12$$

$$f'(2) = 12 \;\Rightarrow\; m_t = f'(2) = 12 \quad \text{y} \quad m_N = -\frac{1}{f'(2)} = -\frac{1}{12}$$

Ecuación de la recta tangente: $y - 8 = 12.(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 16$

Ecuación la recta normal: $y - 8 = -\frac{1}{12}\cdot(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{12}\cdot x + \frac{49}{6}$

8. Dada la parábola de ecuación $\boldsymbol{y = x^2 - 8x + 12}$**,** hallar el punto donde la tangente es paralela al eje de abscisas**.**

Se calcula la derivada de la función dada en un punto cualquiera:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{((x+h)^2-8x+12)-(x^2-8x+12)}{h}=12$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x^2+2xh+h^2-8x-8h+12)-(x^2-8x+12)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2-8h}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x^2+2xh+h^2-8x-8h+12)-(x^2-8x+12)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2-8h}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h.(2x+h-8)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h-8)=2x-8$$

Como la tangente es paralela al eje de abscisas, las dos rectas tendrán igual pendiente: si debe tomar en cuenta que la pendiente del eje de abscisas es igual a cero, al igualar la derivada a cero queda:

$$m_t = f'(x)=0 \;\Rightarrow\; 2x-8=0 \;\Rightarrow\; x=4$$

9. Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a la curva dada por $f(x)=x^3$ en el punto de abscisa x = 2.

Se calcula la derivada de la función dada en el punto que se indica.
Aplicando la propia definición se tiene que:

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-2^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2^3+3.2^2h+3.2h^2+h^3)-2^3}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3.2^2h+3.2h^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h.(3.2^2+3.2h+h^2)}{h}=\lim_{h\to 0}(3.2^2+3.2h+h^2)=3.2^2=12$$

$$f'(2)=12 \;\Rightarrow\; m_t = f'(2)=12 \quad \text{y} \quad m_N=-\frac{1}{f'(2)}=-\frac{1}{12}$$

Ecuación de la recta tangente: $y-8=12.(x-2) \;\Rightarrow\; y=2x-16$

Ecuación la recta normal: $y-8=-\frac{1}{12}\cdot(x-2) \;\Rightarrow\; y=-\frac{1}{12}\cdot x+\frac{49}{6}$

10. Dada la parábola de ecuación $\boldsymbol{y = x^2 - 8x + 12,}$ hallar el punto donde la tangente es paralela al eje de abscisas**.**

Se calcula la derivada de la función dada en un punto cualquiera**:**

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{((x+h)^2 - 8x + 12) - (x^2 - 8x + 12)}{h} = 12$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2 - 8x - 8h + 12) - (x^2 - 8x + 12)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 - 8h}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2 - 8x - 8h + 12) - (x^2 - 8x + 12)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 - 8h}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h.(2x + h - 8)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h - 8) = 2x - 8$$

Como la tangente es paralela al eje de abscisas, las dos rectas tendrán igual pendiente: si debe tomar en cuenta que la pendiente del eje de abscisas es igual a cero, al igualar la derivada a cero queda:

$$m_t = f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 2x - 8 = 0 \;\Rightarrow\; x = 4$$

Derivada de una función.

La definición de la derivada de una función matemática se relaciona con la noción del límite. La derivada se entiende como el límite del cociente entre el incremento de la función y el de la variable cuando tiende a cero.

Actualmente existen varios conceptos, la definición más común, que cuando una variable independiente de una función continúa y=f(x) en x_0 es el valor de $f'(x_0)$ determinado por el limite.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$ Siempre y cuando el límite exista.

Este límite se simboliza $f'(a)$.

A la derivada se le denomina también como coeficiente diferencial, y la operación de calcular la derivada de una función se denomina como diferenciación.

La derivada se puede calcular aplicando éste principio que es muy importante para las aplicaciones prácticas. Por ejemplo:

1. Determinar la derivada aplicando el principio de límites de la función: $f(x)=\sqrt{x}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\right]=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}.\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right]$$

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)}\right]=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2. Determinar la derivada aplicando el principio de límites de la función: $f(x)=\cos x$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\cos x}{h}-\sin x\frac{\sin h}{h}=\lim_{h\to 0}\cos x\left(\frac{\cos h-1}{h}\right)-\sin x=-\sin x$$

3. Determinar la derivada aplicando el principio de límites de la función: $f(x)=\sin x$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}$$

$$\lim_{x\to h}\frac{\sin x\cos h-\sin x}{h}+\frac{\sin h}{h}.\cos x$$

$$\lim_{x\to h}\sin x\frac{\cos h-1}{h}+\cos x=\cos x$$

4. Determinar la derivada aplicando el principio de límites de la función

$f(x)=5x^2+4x-2$

$$f'(x)=\frac{5(x+\Delta x)^2+4(x+\Delta x)-2-(5x^2+4x-2)}{\Delta x}$$

$$\acute{}\,f'(x)=\frac{5(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2)+4x+4\Delta x-2-5x^2-4x+2}{\Delta x}$$

$$f'(x)=\frac{5x^2+10x\Delta x+5\Delta x^2+4x+4\Delta-2-5x^2-4x+2}{\Delta x}$$

$$f'(x)=\frac{10x\Delta x+5\Delta x^2+4\Delta x}{\Delta x}=\frac{\Delta x(10x+5\Delta x+4)}{\Delta x}=10x+5\Delta x+4$$

$$f'(x)=10x+4$$

5. Determinar la derivada aplicando el principio de límites de la función $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$

$$f'(x)=\frac{\dfrac{1}{(x+\Delta x)+2}-\dfrac{1}{x+2}}{\Delta x}=\frac{\dfrac{x+2-x-\Delta x-2}{[(x+\Delta x)+2](x+2)}}{\Delta x}=\frac{-\Delta x}{(x+\Delta x+2)(x+2)}*\frac{1}{\Delta x}$$

$$f'(x)=\frac{-1}{(x+2\ )^2}$$

6. Determinar la derivada aplicando el principio de límites de la función $f(u)=u^2-u-2$

$$f'(u)=\frac{(u+\Delta u)^2-(u+\Delta u)-2-(u^2-u-2)}{\Delta u}=\frac{u^2+2u\Delta u+\Delta u^2-u-\Delta u-2-u^2+u+2}{\Delta u}$$

$$f'(u)=\frac{2u\Delta u+\Delta u^2-\Delta u}{\Delta u}=\frac{\Delta u(2u+\Delta u-1)}{\Delta u}=2u+\Delta u-1$$

$$f'(u)=2u-1$$

7. Determinar la derivada aplicando el principio de límites de la función $f(x)=\dfrac{2}{2x+3}$

$$f'(x)=\frac{\dfrac{2}{2(x+\Delta x)+3}-\dfrac{2}{2x+3}}{\Delta x}=\frac{\dfrac{2(2x+3)-2(2(x+\Delta x)+3)}{[2(x+\Delta x)+3](2x+3)}}{\Delta x}=\frac{\dfrac{4x+6-4x-4\Delta x-6}{[2(x+\Delta x)+3](2x+3)}}{\Delta x}$$

$$f'(x)=\frac{-4\Delta x}{(2x+2\Delta x+3)(2x+3)}*\frac{1}{\Delta x}$$

$$f'(x)=\frac{-4}{(2x+3)(2x+3)}=\frac{-4}{(2x+3)^2}$$

Ejercicios propuestos.

1. Encontrar la ecuación de la recta que es tangente a la curva $y = 4x^3 - 5x^2 - 4x$ en el origen.
2. Si la recta tangente a $y = f(x)$ en (4,3), pasa por el punto (0,2) encuentra $f(4)\, y\ f'(4)$
3. Dibujar una función para la cual $f(0) = 0, f'(0) = 3,\ f'(1) = 0\ \ y\ \ f'(2) = -1$
4. Si $f(x) = 2x^2 - 4x$ encuentra $f'(2)$ y úsela para hallar la ecuación de la recta tangente a la función en el punto (2,2)

5. Para las siguientes funciones hallar la derivada en el punto que se indica

$a)\ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 5\ ;\ (8,1)$ $b)\ (x - y^2)(x + xy) = 4\ ;\ (2,1)$ $c)\ x^3 + y^3 = 2xy\ ;\ (1,1)$

6. Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en los puntos (4,3) y (-3,4)
7. Determinar la ecuación de la recta Tangente y Normal a la curva x2 + 2xy2 + 3y4 = 6 en el punto (1, −1).
8. Determine la ecuación de la recta Tangente con su respectivo grafico f(x)= 1/ x en el punto (6,1/ 6).
9. Determine la ecuación de la recta Tangente con su respectivo gráfico de g(x)= $\frac{8}{1+x}$ que pasa por los puntos (-3,-4)
10. Aplicando la definición de derivada calcular la derivada delas siguientes funciones en los valores que se indica
    a) f(x) = 3x + 2 en x = –2
    b) f(x) = x2+ 4x + 1 en x = 1
    c) f(x) = $\sqrt{x+1}$en x = 3
    d) f(x) = x3+ x en x = 2

11. Derivar las siguientes funciones aplicando el principio de los límites:

a. $f(x) = \dfrac{-9}{2(3x+2)}$ b. $f(x) = 3x^4 + 16x^3 + 25x + 5$ c. $f(x) = \left(16x^2 + 5x + 8\right)^5$ .d.

$f(x) = sen(3x^2 + 8)$ e. $f(x) = \dfrac{3x^4 + 15}{x^2}$ f. $f(x) = x^2\sqrt{\cos x}$ $f(x) = \tan(sen(\sqrt{x^2 + 1}))$

h. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3+5x^2+1}}{\sqrt{x}}$ i. $f(x)=(3x+5)\sqrt{x+1}\cos(x^2)$. j. $f(x)=\dfrac{x^3 senx}{\tan x}$

k. $f(x)=\dfrac{2}{x}$

14. Si $f(x)=3x^2-5x$ encuentra $f'(2)$ y úsela para hallar la ecuación de la recta tangente a la función en el punto (2,2)

15. Para las siguientes funciones hallar la pendiente en el punto que se indica

$a)\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=5\ ;\ (8,1)$ $b)\ (x-y^2)(x+xy)=4\ ;\ (2,1)$ $c)\ x^3+y^3=2xy\ ;\ (1,1)$

16. Determinar la ecuación de la línea tangente y normal, aplicando el concepto de derivada, en los puntos (1,2), (3,0), x=1, (0,2) en el orden da cada función

$f(x)=2x^2-x+4$

$f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$

$f(x)=\dfrac{3}{x}$

$f(x)=x^3-\dfrac{1}{x^3}$

REGLAS Y PROPIEDADES DE LAS DERIVADAS

Además de complejo es un proceso tedioso el aplicar los conceptos de límites para poder derivar una función, existiendo reglas que permiten efectuar la diferenciación de una manera mecánica y eficiente, evitando el uso de los límites.

Fórmulas básicas.

Derivada de una función constante.

Es necesario determinar que las constantes, se consideran los números, letras minúsculas del alfabeto que no sean la variable, además de valores como: π, ė, y otros.

Si y = f(x) = c siendo c una constante

$$\boxed{\frac{d}{dx}(c)=0}$$

La derivada de una función constante confirma que la pendiente de una recta horizontal es cero

Ejemplo.

La derivada de y = 4, es $\frac{d}{dx}(4)=0$

La derivada de y = 5, es $\frac{d}{dx}(5)=0$

Si y = 8, entonces y’ = 0

Si y = –2/3, entonces y’ = 0

Derivada de la variable independiente. Función idéntica o identidad.

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x)=1}$$

y = f(x) = x Si y = x entonces. La derivada de variable independiente o con respecto a ella mismo, es igual a la unidad.

Derivada del producto de una constante por la variable independiente.

$$\boxed{\frac{d}{dx}cx = c}$$

La derivada de una constante por la variable independiente es igual a la constante.

Sea la función y = cx, por ejemplo y = 5x

Entonces la derivada de y = 5x, es y' = 5

Si y = 5x /3, entonces y' = 5/3.

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{3x}{2} + ex = \frac{3}{2}(x) + e(x)$$

Calcular la derivada de la Función $f'(x) = \frac{3}{2} + e$

Derivada de la suma o resta de dos funciones.

La derivada de la suma y/o resta algebraica de un número finito de funciones es igual a la suma y/o resta algebraica de las derivadas de las funciones.

Sea $f(x), g(x)$ dos funciones diferenciables en x, la derivada de la suma es:

$$\boxed{\frac{d}{dx} f(x) + /- g(x) = \frac{d}{dx} f(x) + /- \frac{d}{dx} g(x)}$$

Ejemplo: Calcular la derivada**:**

$$f(x) = (x^2 + 5x)(3x^3 - 2x)$$

Solución:

$$f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 15x^4 - 10x^2$$
$$f'(x) = \frac{d}{dx}3x^5 - \frac{d}{dx}2x^3 + \frac{d}{dx}15x^4 - \frac{d}{dx}10x^2$$
$$f'(x) = 15x^4 - 6x^2 + 60x^3 - 20x$$
$$f'(x) = 15x^4 + 60x^3 - 6x^2 - 20x$$

Este ejercicio también se puede resolver empleando otro método como se analizará en la sección siguiente.

Ejemplo: Calcular la derivada:

$$f(x) = x^7 - 4x^5 + 2x^2 - 3$$
$$f'(x) = \frac{d}{dx}x^7 - \frac{d}{dx}4x^5 + \frac{d}{dx}2x^2 - \frac{d}{dx}3$$
$$f'(x) = 7x^6 - 20x^4 + 4x$$

Ejemplo: Calcular la derivada:

$$f(x) = (2x-7)(x-1)^2$$
$$f(x) = (2x-7)(x^2 - 2x + 1)$$
$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x - 7x^2 + 14x - 7$$
$$f(x) = 2x^3 - 11x^2 + 16x - 7$$
$$f'(x) = \frac{d}{x}2x^3 - \frac{d}{dx}11x^2 + \frac{d}{dx}16x - \frac{d}{dx}7$$
$$f'(x) = 6x^2 - 22x + 16$$

Derivada de un producto de funciones.

La derivada de un producto de funciones es igual a la derivada de la primera función por la segunda función más la derivada de la segunda función por la primera.

Sea f(x), g(x) dos funciones diferenciables en x, la derivada de su producto es:

La derivada de un producto se usa cuando todos los factores son variables

$$\boxed{\frac{d}{dx} f(x) * g(x) = \frac{d}{dx} f(x) * g(x) + \frac{d}{dx} g(x) * f(x)}$$

Ejemplo: Hallar la derivada de:

$$\boxed{f(x) = (8x + 2x^3)(4 + 8x)}$$

Solución: $f(x)' = \frac{d}{dx}(8x + 2x^3)(4 + 8x) + \frac{d}{dx}(4 + 8x)(8x + 2x^3)$

$$f(x)' = (8 + 6x)(4 + 8x) + 8(8x + 2x^3)$$
$$f(x)' = 32 + 64x + 24x + 48x^2 + 64x + 16x^3$$
$$f(x)' = 16x^3 + 48x^2 + 152x + 32$$

Ejemplo: Hallar la derivada de:

$$f(x) = (x - 9)(x + 3)$$
$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x - 9)(x + 3) + \frac{d}{dx}(x + 3)(x - 9)$$
$$f'(x) = 1(x + 3) + 1(x - 9)$$
$$f'(x) = x + 3 + x - 9 = 2x - 6$$

Ejemplo: Hallar la derivada de:

$$f(x) = (x^2 + 5x)(3x^3 - 2x)$$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(x^2+5x\right)\left(3x^3-2x\right)+\frac{d}{dx}\left(3x^3-2x\right)\left(x^2+5x\right)$$
$$f'(x)=(2x+5)\left(3x^3-2x\right)+(9x-2)\left(x^2+5x\right)$$
$$f'(x)=6x^4-4x^2+15x^3-10x+9x^3+45x^2-2x^2-10x$$
$$f'(x)=6x^4+24x^3+39x^2-20x$$

Derivada de un cociente de funciones.

La derivada del cociente de dos funciones es igual a la derivada del numerador por el denominador menos la derivada del denominador por el numerador y todo dividido para el cuadrado del denominador.

Sea $f(x), g(x)$ dos funciones diferenciables en x, la derivada del cociente es:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{d}{dx}f(x)*g(x)-\frac{d}{dx}g(x)*f(x)}{\left[f(x)\right]^2}}$$

En la derivada del cociente es conveniente encerrar todos los factores y derivadas en paréntesis, teniendo cuidado con el signo monos del numerador

Ejemplo: Hallar la derivada de

$$f(x)=\frac{3x^3+2x+5}{x^3-2x+8}$$

Solución:

$$f'(x)=\frac{\frac{d}{dx}(3x^3+2x+5)(x^3-2x+8)-\frac{d}{dx}(x^3-2x+5)(3x^3+2x+5)}{(x^3-2x+8)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(6x^2+2)(x^3-2x+8)-(3x^2-2)(3x^3+2x+5)}{(x^3-2x+8)^2}$$

$$f'(x)=\frac{6x^5-12x^3+48x^2+2x^3-4x^2+16-9x^5-6x^3-15x^2+6x^3+4x+10}{(x^3-2x+8)^2}$$

$$f'(x)=\frac{6x^5-10x^3+29x^2+26}{(x^3-2x+8)^2}$$

Ejemplo: Hallar la derivada de:

$$f(x)=\frac{3x^3+2x+5}{x^3-2x+8}$$

Tenemos un cociente de funciones

$$f'(x)=\frac{\frac{d}{dx}(3x^3+2x+5)(x^3-2x+8)-\frac{d}{dx}(x^3-2x+5)(3x^3+2x+5)}{(x^3-2x+8)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(6x^2+2)(x^3-2x+8)-(3x^2-2)(3x^3+2x+5)}{(x^3-2x+8)^2}$$

$$f'(x)=\frac{6x^5-12x^3+48x^2+2x^3-4x^2+16-9x^5-6x^3-15x^2+6x^3+4x+10}{(x^3-2x+8)^2}$$

$$f'(x)=\frac{6x^5-10x^3+29x^2+26}{(x^3-2x+8)^2}$$

Ejemplo: Hallar la derivada de:

$$f(x)=\frac{4x^3}{x^2-4}+\frac{3}{x+2}$$

$$f(x)=\frac{4x^3+3(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{4x^3+3x-6}{x^2-4}$$

:
$$f'(x)=\frac{\frac{d}{dx}(4x^3+3x-6)(x^2-4)-\frac{d}{dx}(x^2-4)(4x^3+3x-6)}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(12x^2+3)(x^2-4)-(2x)(4x^3+3x-6)}{(x^2-4)^2}=\frac{12x^4-48x^2+3x^2-12-8x^4-6x^2+12x}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4x^4-51x^2+12x-12}{(x^2-4)^2}$$

Derivada de una potencia de funciones.

La derivada de la potencia de una función, donde" n" es su exponente, puede ser un número entero o fraccionario, es igual al producto del exponente por la base de la potencia, multiplicada por la derivada de la base.

$$\boxed{\frac{d}{dx}x^n=n(x)^{n-1}*\frac{d}{dx}x}$$

DE RADICAL

$$\boxed{\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}}$$

POTENCIA

En las derivadas no existen fórmulas para derivar radicales, cuando aparecen los radicales se debe transformar a potencias y luego aplicar la fórmula de derivadas

Ejemplo: Hallar la derivada de

$$f(x)=(3x^2)^6$$

Cuando n=1 $\frac{d}{dx}(x^{`})=$

$$\frac{`d}{dx}(x)=1$$

$$f(x)' = 6\left(3x^2\right)^{6-1}\frac{d}{dx}\left(3x^2\right)$$

$$f(x)' = 6\left(3x^2\right)^5 6x$$

$$f(x)' = 36x\left(3x^2\right)^5$$

Ejemplo: Hallar la derivada de:

$$u = \left[(y-3)(3y+5)+8\right]^5$$

$$u = (3y^2+8y-9y-15+8)^5 = (3y^2-y-7)^5$$

$$: u' = 5(3y^2-y-7)^4 * \frac{d}{dy}(3y^2-y-7)$$

$$u' = 5(3y^2-y-7)^4(6y-1)$$

$$u' = (30y-5)(3y^2-y-7)^4$$

Ejemplo: Hallar la derivada de:

$$y = \left(\frac{5x-2}{2x+1}\right)^8$$

$$y' = 8\left(\frac{5x-2}{2x+1}\right)^{8-1} * \frac{d}{dx}\left(\frac{5x-2}{2x+1}\right)$$

$$y' = 8\left(\frac{5x-2}{2x+1}\right)^7 * \frac{\frac{d}{dx}(5x-2)*(2x+1)-\frac{d}{dx}(2x+1)*(5x-2)}{(2x+1)^2}$$

$$y' = 8\left(\frac{5x-2}{2x+1}\right)^7 * \frac{5(2x+1)-2(5x-2)}{(2x+1)^2}$$

$$y' = 8\left(\frac{5x-2}{2x+1}\right)^7 * \frac{10x+5-10x+4}{(2x+1)^2} = 8\left(\frac{5x-2}{2x+1}\right)^7 * \frac{9}{(2x+1)^2}$$

$$y' = 8\frac{(5x-2)^7}{(2x+1)^7} * \frac{9}{(2x+1)^2} = \frac{72(5x-2)^7}{(2x+1)^9}$$

LA REGLA DE LA CADENA O DERIVADA DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

La regla de la cadena es uno de los recursos que más se utiliza en cálculo diferencial, en donde la función se sustituye por otra más simple y aplicamos la derivada correspondiente, multiplicada por la derivada que se sustituyó.

Cuando se utiliza para para derivar una función compleja, es necesario reconocer que la función dada se puede escribir como la composición de dos funciones más simples.

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}*\frac{du}{dx}}$$

Ejemplo: Hallar la derivada: $y=\sqrt{4-x^2}$

Solución: $y=(4-x^2)^{\frac{1}{2}}$ Hago que $U=4-x^2$

$$'\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}*\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}U^{\frac{-1}{2}}(-2x)=-xU^{\frac{-1}{2}}=\frac{-x}{U^{\frac{1}{2}}}=\frac{-x}{(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

Ejemplo: Hallar la derivada:

$$y=\left(x^3+9x^2-7\right)^6$$

Se considera:

$$U = x^3 + 9x^2 - 7$$
$$y = U^6$$
$$y' = 6U^5 \frac{d}{dx}U$$
$$y' = 6U^5\left(3x^2 + 18x\right)$$
$$reemplazo$$
$$y' = 6\left(x^3 + 9x^2 - 7\right)^5\left(3x^2 + 18x\right)$$
$$y' = \left(18x^2 + 108x\right)\left(x^3 + 9x^2 - 7\right)^5$$

Ejemplo: Calcular la derivada:

$$f(x) = \left(x^2 + 5x\right)\left(3x^3 - 2x\right)$$

Existen dos formas para resolver:

1-Resolver las operaciones indicadas y al resultado derivar.

2- Resolver como un producto de funciones.

Es importante que el estudiante, resuelva de manera más fácil y menos compleja, se siguiere considerar la primera alternativa.

Solución**:**

$$f(x) = 3x^5 - 2x^3 + 15x^4 - 10x^2$$
$$f'(x) = \frac{d}{dx}3x^5 - \frac{d}{dx}2x^3 + \frac{d}{dx}15x^4 - \frac{d}{dx}10x^2$$
$$f'(x) = 15x^4 - 6x^2 + 60x^3 - 20x$$
$$f'(x) = 15x^4 + 60x^3 - 6x^2 - 20x$$

Ejemplo: Calcular la derivada:

$$f(x) = \frac{3x^3 + 2x + 5}{x^3 - 2x + 8}$$

Tenemos un cociente de funciones:

$$f'(x)=\frac{\frac{d}{dx}(3x^3+2x+5)(x^3-2x+8)-\frac{d}{dx}(x^3-2x+5)(3x^3+2x+5)}{(x^3-2x+8)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(6x^2+2)(x^3-2x+8)-(3x^2-2)(3x^3+2x+5)}{(x^3-2x+8)^2}$$

$$f'(x)=\frac{6x^5-12x^3+48x^2+2x^3-4x^2+16-9x^5-6x^3-15x^2+6x^3+4x+10}{(x^3-2x+8)^2}$$

$$f'(x)=\frac{6x^5-10x^3+29x^2+26}{(x^3-2x+8)^2}$$

Ejemplo: Calcular la derivada:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^3-1}}{\sqrt[3]{x^3}-1}$$

$$f(x)=\frac{\left(x^3-1\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^3-1\right)^{\frac{1}{3}}}=\left(x^3-1\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{6}(x^3-1)^{\frac{-5}{6}}*\frac{d}{dx}(x^3-1)$$

$$f'(x)=\frac{1}{6}(x^3-1)^{\frac{-5}{6}}*3x^2$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^2(x^3-1)^{\frac{-5}{6}}$$

$$f'(x)=\frac{x^2}{2(x^3-1)^{\frac{5}{6}}}=\frac{x^2}{2\sqrt[6]{(x^3-1)^5}}$$

Ejemplo: Calcular la derivada aplicando la Regla de la Cadena:

$$y=\sqrt{4-x^2}$$

$y=(4-x^2)^{\frac{1}{2}}$ Hago que $U=4-x^2$

$$\frac{'dy}{dx}=\frac{dy}{du}*\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}U^{\frac{-1}{2}}(-2x)=-xU^{\frac{-1}{2}}=\frac{-x}{U^{\frac{1}{2}}}=\frac{-x}{(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

Ejemplo: Calcular la derivada:

$$u=\left[(y-3)(3y+5)+8\right]^5$$
$$u=(3y^2+8y-9y-15+8)^5=(3y^2-y-7)^5$$
$$u'=5(3y^2-y-7)^4*\frac{d}{dy}(3y^2-y-7)$$
$$u'=5(3y^2-y-7)^4(6y-1)$$
$$u'=(30y-5)(3y^2-y-7)^4$$

Ejemplo: Calcular la derivada:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3-1}$$

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{x^3-1}=\frac{\frac{d}{dx}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(x^3+1)-\frac{d}{dx}(x^3-1)(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(x^3-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{-1}{2}}(2x)(x^3-1)-3x^2(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(x^3-1)^2}=\frac{(x^4-x)(x^2+1)^{\frac{-1}{2}}-3x^2(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(x^3-1)^2}$$

$$\frac{\frac{x^4-x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}-3x^2(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(x^3-1)^2}=\frac{\frac{(x^4-x)-3x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}}{(x^3-1)^2}=\frac{\frac{x^4-x-3x^4-3x^2}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}}{(x^3-1)^2}=\frac{\frac{-2x^4-3x^2-x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}}{(x^3-1)^2}$$

$$\frac{-2x^4-3x^2-x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}*\frac{1}{(x^3-1)^2}=\frac{-2x^4-3x^2-x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}*(x^3-1)^2}$$

Ejemplo: Calcular la derivada:

$$f(x)=(\sqrt{2x}-2)\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}+3\right)=\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}+3\sqrt{2x}-\frac{2}{\sqrt{2x}}-6=1+3\sqrt{2x}-\frac{2}{\sqrt{2x}}-6$$

$$f`(x)=3*\frac{1}{2}(2x)^{\frac{-1}{2}}*2-2\left(\frac{-1}{2}\right)(2x)^{\frac{-3}{2}}*2=\frac{3}{(2x)^{\frac{1}{2}}}+\frac{2}{(2x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{3(2x)+2}{(2x)^{\frac{3}{2}}}=\frac{6x+2}{(2x)^{\frac{3}{2}}}=\frac{6x+2}{\sqrt{(2x)^3}}$$

Ejercicios para resolver.

Calcular las derivadas $\frac{dx}{dy}$ de las siguientes funciones:

1. $y=(3x-8)(2x\ \ +8)$ 2. $f(x)=\frac{3x^2+5}{2-x}$ 3. $y=\frac{\sqrt[3]{2x-6}}{x+1}$

4. $f(x)=\frac{(x\ \ +1)^2}{x-1}$ 5. $f(x)=\frac{3}{\sqrt[3]{6x+1}}$ 6. $y=x\sqrt{x^3-6}$

7. $y=\frac{1}{(x^3-5)}$ 8. $y=\sqrt{\frac{x-3}{x+2}}$ 9. $y=\frac{(4x^2+1)(7x+2)}{(2x+5)^2}$

10. $y=\frac{\sqrt{x+3}(3x^2-5)^2}{8x-5}$ 11. $y=\frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt[3]{x-3}}$ 12. $y=\sqrt{1+x\ln 6}$

13. $y=\left(\frac{3x-5}{x-2}\right)^7$ 14. $y=[(x+3)(x^3-2)+9]^2$ 15 $y=(3x+5)^3(2x-3)^2$

16 $f(x)=\frac{8x^4-9}{7\sqrt[3]{x}}$ 17. $y=\frac{\sqrt{x^3-2}}{\sqrt[3]{x^3-2}}$ 18. $f(x)=\sqrt{\frac{x^2-3}{xLn2}}$

$f(x)=\left(x^3+3x^2\right)^{\frac{1}{3}}$

$f(x)=\left(\dfrac{2x-3}{3x}\right)^6$

$f(x)=\dfrac{(2x-1)^3-(2x+1)^4}{x^3}$

$f(p)=\sqrt[5]{4p^3}+\dfrac{2}{\sqrt[5]{4p^3}}$

$f(x)=5x^4-(3x-4)^4$

$f(x)=\dfrac{4x^3-2x+9}{x^{\frac{1}{2}}}$

20. $y=\sqrt[3]{\dfrac{4x+5}{3x-2}}$ 21. $Z=\dfrac{\sqrt{4x+1}}{x+3}$

Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de las siguientes funciones en el punto que se indica:

22. $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ en $(4,5)$ 23. $f(x)=x\sqrt{x^2-16}$ En $x=5$

24. $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{x+4}}$ en $x=-3$ 25. $f(x)=\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^4$ En $x=2$

26. $f(x)=\sqrt[3]{\left(x^2-5\right)^2}$ en $(3,1)$ 27. $y=\dfrac{3}{x^2}$ en (1,2)

28 $y=\dfrac{2-x^2}{4}$ en (4,-3) 29. $y=\dfrac{\sqrt{x}\left(3-x^2\right)}{x}$ Cuando x=4

DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DIRECTAS

Derivada de la función seno.

La derivada del Seno de una función Trigonométrica es igual al coseno de la función por la derivada de la función.

Ejemplo: Derivar

$$\boxed{\frac{d}{dx} Sen.x = Cos.x * \frac{d}{dx} x}$$

$$y = Sen.(5x+2)$$
$$y` = Cos(5x+2)\frac{d}{dx}(5x+2)$$
$$y` = 5Cos(5x+2)$$

Ejemplo: Derivar

$$y = (sen.x)^2$$
$$y` = 2(sen.x)\frac{d}{dx} Sen.x$$
$$y` = 2Sen.x.Cos.x$$

Ejemplo: Derivar

$$f(x) = 2 + 3Senx$$
$$f'(x) = 0 + 3(Cosx)$$
$$f'(x) = 3(Cosx)$$

Derivada de la función coseno.

La derivada del Coseno de una función Trigonométrica es igual a menos el seno de la función por la derivada.

$$\boxed{\frac{d}{dx}Cos.x = -Sen.x * \frac{d}{dx}x}$$

Ejemplo: Derivar

$$y = Cos.2x$$
$$y` = -Sen.2x.\frac{d}{dx}2x$$
$$y` = -2Sen.2x$$

Ejemplo: Derivar

$$y = Cos.(5x^3 - 2x)$$
$$y` = -Sen.(5x^3 - 2x)\frac{d}{dx}(5x^3 - 2x)$$
$$y` = -Sen.(5x^3 - 2x)(15x^2 - 2)$$
$$y` = -(15x^2 - 2)Sen.(5x^3 - 2x)$$

Ejemplo: Derivar

$$y = \frac{Cosx}{x^2}$$
$$y' = \frac{\frac{d}{dx}Cosx * x^2 - \frac{d}{dx}x^2 * Cosx}{(x^2)^2} = \frac{-Senx * x^2 - 2x * Cosx}{x^4}$$
$$y' = \frac{x(-xSenx - 2Cosx)}{x^4} = \frac{-xSenx - 2Cosx}{x^3}$$

Derivada de la función tangente.

Para resolver la función tangente se puede expresar en términos de seno y coseno. Lo resolvemos como derivada de un cociente. Se pude utilizar la siguiente fórmula:

$$\boxed{\frac{d}{dx}Tan..x = Sec.^2 x * \frac{d}{dx}x}$$

Ejemplo. Derivar:

$$y = Tan\sqrt[5]{4x}$$
$$y = (Tan.4x)^{\frac{1}{5}}$$
$$y` = \frac{1}{5}(Tan.4x)^{\frac{-4}{5}}\frac{d}{dx}(Tan.4x)$$
$$y` = \frac{1}{5}(Tan.4x)^{\frac{-4}{5}}Sec^2 4x(4)$$
$$y` = \frac{4Sec^2 4x}{5(Tan.4x)^{\frac{4}{5}}}$$

Ejemplo. Derivar:

$$y = 3Senx + 4Tanx^2$$
$$y \quad = 3Cosx + 4(Sec^2 x)2x$$
$$y' = 3Cosx + 8xSec^2 x$$

Ejemplo. Derivar:

$$f(x) = Tan\sqrt{3x^3 - 6} = Tan(3x^3 - 6)^{\frac{1}{2}}$$
$$f'(x) = Sec^2(3x^3 - 6)^{\frac{1}{2}} * \frac{d}{dx}(3x^3 - 6)^{\frac{1}{2}}$$
$$f'(x) = Sec^2(3x^3 - 6)^{\frac{1}{2}} * \frac{1}{2}(3x^3 - 6)^{-\frac{1}{2}}(9x^2) = Sec^2(3x^3 - 6)^{\frac{1}{2}} * \frac{9x^2}{2(3x^3 - 6)^{\frac{1}{2}}}$$
$$f'(x) = \frac{9x^2 Sec^2(3x^3 - 6)^{\frac{1}{2}}}{2(3x^3 - 6)^{\frac{1}{2}}}$$

DERIVADA DE LAS FUNCIONES RECÍPROCAS

Se designan a la cosecante, secante y cotangente, como razones reciprocas al Seno, Coseno y Tangente del siguiente modo:

- La Cosecante: (abreviado como Csc. o Cosec.) es la reciproca del seno, o también su inverso multiplicativo $Cscx = \frac{1}{Sen.x}$

- La Secante: (abreviado como Sec.) es la reciproca del coseno, o su inverso multiplicativo: $Sec.x = \frac{1}{Senx}$

- La Cotangente: (abreviado como Cot. o Cta.) es la reciproca de la Tangente, o su inverso multiplicativo: $Cot = \frac{1}{Tan.x}$

Derivada de función cotangente.

La derivada de la cotangente de una función trigo métrica, es igual menos cosecante al cuadrado de la función por la derivada de la Función.

La derivada de co-funciones está acompañada del signo negativo

$$\boxed{\frac{d}{dx}Cot.x = -Csc^2 x * \frac{d}{dx}x}$$

Derivada de función secante.

La derivada de la cotangente de una función trigonométrica, es a la secante de la función por la tangente de la función, multiplicado por la derivada de la función.

$$\boxed{\frac{d}{dx}Sec.x = Secx * Tanx * \frac{d}{dx}x}$$

Derivada de la función cosecante.

La derivada de la cosecante de una función trigonométrica, es menos la cosecante por la cotangente, multiplicado por la derivada de la función

$$\boxed{\frac{d}{dx}Csc.x = -Csc.x.Cot.x * \frac{d}{dx}x}$$

Ejercicios de aplicación.

Ejemplo. Derivar:

$$y = 2Cot\,\frac{x}{3}$$
$$y` = 2\left(-Csc^2\,\frac{x}{3}\right)\frac{d}{dx}\frac{x}{3}$$
$$y` = 2\left(-Csc^2\,\frac{x}{3}\right)\frac{1}{3}$$
$$y` = \frac{-2}{3}Csc^2\,\frac{x}{3}$$

Ejemplo. Derivar:

$$y = Sec.5x$$
$$y' = Sec.5x * Tan.5x * \frac{d}{dx}5x$$
$$y' = 5(Sec.5x * Tan.5x)$$

Ejemplo. Derivar:

$$y = Csc.\frac{1}{x+2}$$

$$y' = \left(-Csc.\frac{1}{x+2} * Cot.\frac{1}{x+2}\right)\frac{d}{dx}\frac{1}{x+2}$$

$$y' = \left(-Csc.\frac{1}{x+2} * Cot.\frac{1}{x+2}\right)\frac{-1}{(x+2)^2}$$

$$y' = \frac{-1}{(x+2)^2}\left(-Csc.\frac{1}{x+2} * Cot.\frac{1}{x+2}\right)$$

Ejemplo. Derivar:

$$f(x) = 2Tanx * Cot\sqrt{x^2+5x-3} = 2Tanx * Cot\left(x^2+5x-3\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}2Tanx * Cot\left(x^2+5x-3\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{d}{dx}Cot\left(x^2+5x-3\right)^{\frac{1}{2}} * 2Tanx$$

$$f'(x) = 2Sec^2x * Cot\left(x^2+5x-3\right)^{\frac{1}{2}} - Csc^2\left(x^2+5x-3\right)^{\frac{1}{2}} * \frac{1}{2}\left(x^2+5x-3\right)^{-\frac{1}{2}}(2x+5) * 2Tanx$$

$$f'(x) = 2Sec^2x * Cot\left(x^2+5x-3\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{Csc^2\left(x^2+5x-3\right)^{\frac{1}{2}}(2x+5) * 2Tanx}{\frac{1}{2}\left(x^2+5x-3\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Derivadas Inversas de las funciones trigonométricas.

Las características de las fórmulas de derivación de las funciones trigonométricas inversas, así como de su escritura, son:

a) Son una fracción cuyo numerador es la derivada del argumento.

b) Las cofunciones son iguales, diferenciadas solamente de un signo negativo, es decir, la fórmula del arco seno es igual a la del arco coseno, solamente que ésta última es negativa; la fórmula del arco tangente es igual a la del arco cotangente, siendo ésta última negativa. Y algo semejante sucede con el arco secante y la arco cosecante.

c) El símbolo de una función trigonométrica inversa, por ejemplo, del seno inverso, debe ser arcsen, que se lee “arco seno” y significa “seno cuyo arco es”, es decir, “seno cuyo ángulo es”, ya que el arco en una circunferencia es igual al ángulo central que abarca. En matemáticas el símbolo universal para denotar un inverso es un exponente a la menos uno, por ejemplo, A- 1 significa el inverso de A.

Sin embargo, en virtud de que las reglas de escritura matemática recomiendan, para evitar confusiones, no emplear el mismo símbolo que pueda tener dos significados diferentes, resulta incorrecto escribir sen - 1 u en vez de arcsen u, ya que la primera simbología podría tener dos significados que confundirían al lector, una como el seno inverso, la otra como

$$Sen^{-1}x = \frac{1}{Senx} = Cscx$$

$$y = arcsenx \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad y = arctgx \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y = \arccos x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad y = arctCtgx \Rightarrow y' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$y = arc\sec x \Rightarrow y' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad y = ar\csc x \Rightarrow y' = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

Ejemplo. Derivar:

$$y = 3\cdot senx + \sqrt{x} - \frac{1}{x^3} + e^x + \sqrt{5}$$

$$y' = \frac{d}{dx}3senx + \frac{d}{dx}\sqrt{x} - \frac{d}{dx}(-\frac{1}{x^3}) + \frac{d}{dx}e^x + \frac{d}{dx}\sqrt{5}$$

$$y' = 3\cos x + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x^4} + e^x$$

Ejemplo. Derivar:

$$y = \frac{x}{arctgx}$$

$$y' = \frac{1 \cdot arctgx - x \cdot \frac{1}{1+x^2}}{(arctgx)^2} = \frac{\frac{arctgx}{1} - \frac{x}{1+x^2}}{(arctgx)^2} = \frac{\frac{(1+x^2)arctgx - x}{1+x^2}}{(arctgx)^2} = \frac{(1+x^2)arctgx - x}{(1+x^2)(arctgx)^2}$$

Ejemplo**.** Derivar:

$y = arcsen\sqrt{x}$

$$y' = \frac{1/2\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x \cdot (1-x)}}$$

Ejemplo. Derivar:

$y = Ln(arctg\ x^3)$

Se trata de derivar $y = Lf(x)$, donde $f(x) = arctg\ x^3$. En consecuencia, aplicamos la regla, y representamos por $(arctg\ x^3)'$ la derivada de $arctg\ x^3$. Por tanto:

$$y' = \frac{(arctg\ x^3)'}{arctg\ x^3}$$

Ahora, para calcular la derivada de $arctg\ x^3$, aplicamos la regla del arco tangente (la última de “inversas de funciones trigonométricas”), es decir

$$y = arctgf(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{1+[f(x)]^2} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$$

Ahora $f(x) = x^3$. En consecuencia,

$$(arctg\ x^3)' = \frac{3x^2}{1+(x^3)^2} = \frac{3x^2}{1+x^6}$$

Finalmente, la derivada de la función pedida es:

$$y' = \frac{\frac{3x^2}{1+x^6}}{arctg\ x^3} = \frac{3x^2}{\left(1+x^6\right)arctg\ x^3}$$

Ejercicios para resolver.

Obtener las derivadas de las siguientes funciones:

1. $y = Tane^{5x}$ 2. $y = CSce^{-6x}$ 3. $y = \sqrt{1 + x\ln 6}$ 4. y = cosec (5x +2)

5. y = cos 5x 6. y = x sen x 7. y = 3x + sec x 8. $y = \sqrt{Senx}$

9. $y = (Senx)^x$ 10. $y = Tan\left(x^3 + 1\right)$ 11. $y = Cot4x^2$ 12. $y = \frac{Tanx}{x}$

13. y = sen x + cos x 14, $y = \sqrt{x}Senx$ 15. $y = \frac{x^2}{Senx}$ 16. y = x cos x

17. $y = \frac{1}{2}x - Tanx$ 18. $y = \frac{1 - Senx}{1 + Senx}$ 19. $y = (Senx)^{Cosx}$ 20. $y = \frac{Secx}{x}$

21. $y = \sqrt{x + Cosx}$ 22. y = sen x tang x 23. $y = \frac{Sec^4 x}{3} - \frac{Sec^3 x}{2}$

24. y = sen 2x cos 2x 25. $y = 3^{\cos x}$ 26. $y = 3Cotg^3(x-3)$

27. $y = Sec^2 3x$ 28. y = 5x cos x 29. y = (x + 1) tang x

30. $y = \frac{Tanx}{Cotgx}$ 31. $y = \frac{Senx - Cosx}{Cosx + Senx}$ 32. $y = Sen\left(x^2 - 1\right)$

33. $f(x) = \frac{Tan(3x^2 - 4x)}{Sec(x-9)}$ 33. $f(x) = \frac{1}{9}Sen(x-5)^3 * Cos\left(x^3 + 2x\right)^2$

34. $y = arcsenx^2$ 35. $f(x) = \frac{arcsenx}{x}$ 36. $f(x) = arcSen\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

DERIVADA DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS

El logaritmo de un número “n” es el exponente al que se debe elevarse la base para obtener dicho número “n”.

Los logaritmos pueden ser base de cualquier número, pueden existir un infinito tipo de logaritmos, por lo cual se acordó emplear dos tipos de logaritmos:

-Logaritmos naturales, representado por el símbolo Ln, tiene como base el número irracional 2,718281…representado por la letra “e”, es decir e=2,718281…

-Logaritmo base diez (por tratarse de un sistema decimal), también se denominan como logaritmos vulgares o logaritmos decimales, se representa por el símbolo Log. Si no se especifica la base, quiere decir que es 10.

Es importante conocer y aplicar las propiedades de los logaritmos.

Propiedad de los logaritmos.

Las propiedades de los Logaritmos son consecuencia de las leyes de los exponentes y se cumple para cualquier base positiva diferente de 1.

Las propiedades se aplican tanto para los logaritmos naturales y de base 10.

$$Log_b 1 = 0; b \geq 0..b \neq 1$$

$$Log_b b = 0; b \geq 0..b \neq 1$$

$$b^c = a..entonces.Log_b a = c$$

$$Log_b M * N = Log_b M + Log_b N$$

$$Log_b \left(\frac{M}{N} \right) = Log_b M - Log_b N$$

$$Log_b M^N = NLog_b M$$

$$Log_b \sqrt[N]{M} = \frac{Log_b M}{N}$$

$$Log_{b^L} M = \frac{1}{L} Log_b M = Log_b M^{\frac{1}{L}}$$

$$Log_b M = \frac{Log_x M}{Log_x b}; b; M; x; son..números..positivos..b \neq 1; x \neq 1$$

$$Log_b \frac{1}{M} = -Log_b M$$

$$Log_b M^n = nLog_b M$$

$$Log_{\frac{1}{b}} = Log_b \left(\frac{1}{b} \right) = -1$$

$$Log_a a = 1$$

$$e^{Lny} = y$$

$$Ln(e^x) = x$$

$$Lne = 1 .... Lne^x = x$$

$$Sea....y = a^x ....donde...a = e^{Ln.a} ....y = \left(e^{Ln.a}\right)^x = e^{(Ln.a)x}$$

$$y = e^{Kx}, K = Ln.a$$

$$Log_a y = \frac{Ln.y}{Ln.a}$$

Logaritmos naturales.

Los logaritmos naturales o informalmente logaritmo neperiano, son aquellos que tienen como base e, un número irracional cuyo valor aproximado es 2,718281.

Derivada de una función simple.

La derivada del logaritmo natural o neperiano de x, para x mayor a cero,

Logaritmo Natural de x (Ln.x) es la **potencia** a la que debe elevar **e** para obtener **x**

Es igual a 1 sobre x.

$$\boxed{\frac{d}{dx} Ln.x = \frac{1}{x}}$$

Derivada de una función compuesta.

La derivada de un logaritmo natural de una función compuesta, es a 1 sobre la función, por la derivada de la función.

$$\boxed{\frac{d}{dx} Ln. f(x) = \frac{1}{f(x)} \frac{d}{dx} f(x)}$$

Ejemplo. Derivar:

$$f(x) = Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos tenemos

$$f(x) = Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = Ln.(1+x) - Ln(1-x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \frac{d}{dx}(1+x) - \frac{1}{1-x} \frac{d}{dx}(1-x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x} = \frac{1-x-1-x}{(1+x)(1-x)} = \frac{-2}{1-x^2}$$

Ejemplo. Derivar:

$$f(x) = Lnx\sqrt{x}$$

$$f(x) = Lnx\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}Ln.x(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}}(Ln.x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}Ln.x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{Ln.x}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2 - Ln.x}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2 - Ln.x}{2\sqrt{x}}$$

Ejemplo. Derivar:

$$y = Ln\left(\frac{x^3 - 1}{x^2 + 5}\right)$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos, se puede expresar: $y = Ln\left(x^3 - 1\right) - Ln\left(x^2 + 5\right)$

Derivando

$$y = \frac{d}{dx}Ln\left(x^3 - 1\right) - \frac{d}{dx}Ln(x^2 + 5)$$

$$y' = \frac{1}{x^3 - 1}\left(3x^2\right) - \frac{1}{x^2 + 5}\left(2x\right) = \frac{3x^2}{x^3 - 1} - \frac{2x}{x^2 + 5}$$

$$y' = \frac{3x^2(x^2 + 5) - 2x(x^3 - 1)}{(x^3 - 1)(x^2 + 5)}$$

$$y' = \frac{3x^4 + 15x^2 - 2x^4 + 2x}{(x^3 - 1)(x^2 + 5)} = \frac{x^4 + 17x^2}{(x^3 - 1)(x^2 + 5)}$$

Logaritmos de base 10.

Se denomina como logaritmo decimal, logaritmo común o logaritmo vulgar, cuya base es 10, por lo tanto, el exponente al cual hay que elevar 10, para obtener el número. Se denomina $Log_a(x)$, cuando no se especifica el valor de la base a, significa que es el valor 10.

Derivada de una función simple.

La derivada de un logaritmo decimal, es igual a 1 sobre el logaritmo natural de la base, por el cociente de 1 sobre x.

$$\boxed{\frac{d}{dx} Log._a\, x = \frac{1}{Ln.a} * \frac{1}{x}}$$

Derivada de una función compuesta.

La derivada logarítmica decimal de una función compuesta, es igual a 1 sobre el logaritmo natural de la base, por el cociente de 1 por la función, multiplicado por la derivada de la función.

$$\boxed{\frac{d}{dx} Log._a\, f(x) = \frac{1}{Ln.a} * \frac{1}{f(x)} * \frac{d}{dx} f(x)}$$

Ejemplo. Derivar:

$$f(x)=\frac{Log.x}{x}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{d}{dx}Log.x(x)-(Log.x)}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{Ln.10(x)}(x)-(Log.x)}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{Ln.10}-Log.x}{x^2}=\frac{\frac{1-Ln.10(Log.x)}{Ln.10}}{x^2}=\frac{1-Ln.10(Log.x)}{Ln.10(x^2)}$$

Ejemplo. Derivar:

$$f(x)=Log_2(x^4-8x)$$

$$f'(x)=\frac{1}{Ln.2}*\frac{1}{x^4-8x}*(4x^3-8)$$

$$f'(x)=\frac{4x^3-8}{Ln.2(x^4-8x)}$$

Ejemplo. Derivar:

$$y=\frac{Log(e^x)}{x}$$

$$y'=\frac{\frac{d}{dx}(e^x)*x-\frac{d}{dx}x(e^x)}{x^2}$$

$$y'=\frac{(e^x)*x-(e^x)}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

DERIVADA DE FUNCIONES EXPONENCIALES

La función exponencial, es conocida como la función real e^x donde e, es el número de Euler.

Se denomina función exponencial de base **a**, aquella que cuya forma genérica es $f(x) = a^x$, siendo a un número positivo distinto a 1.

Derivada de función exponencial de base "e".

Derivada de una función simple.

$$\boxed{\frac{d}{dx}e^x = e^x}$$

Derivada de una función compuesta.

$$\boxed{\frac{d}{dx}e^{f(x)} = e^{f(x)} * \frac{d}{dx}f(x)}$$

La pendiente de la gráfica $f(x) = e^x$ en cualquier punto (x, e^x), es numéricamente igual a la coordenada del punto

Ejercicio derivar:

$$y = \frac{e^{x+3}}{e^{x-5}}$$

$$y' = e^8 = 0$$

Ejercicio derivar:

$$f(x)=\frac{e^{3x}}{\sqrt{x}}=\frac{e^{3x}}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{d}{dx}e^{3x}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)-\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}}\left(e^{3x}\right)}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{2}}=\frac{3e^{3x}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)-\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}\left(e^{3x}\right)}{x}$$

$$f(x)'=(3e^{3x}*x^{\frac{1}{2}}-\frac{e^{3x}}{2x^{\frac{1}{2}}})\frac{1}{x}$$

$$f(x)'=3x^{\frac{1}{2}}e^{3x}-\frac{e^{3x}}{2x^{\frac{3}{2}}}=\frac{3x^{2}e^{3x}-e^{3x}}{2x^{\frac{3}{2}}}=\frac{e^{3x}\left(3x^{2}-1\right)}{2\sqrt{x}}$$

Ejercicio derivar:

$$y=\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}$$

$$y'=\frac{\frac{d}{dx}\left(e^{x}+1\right)\left(e^{x}-1\right)-\frac{d}{dx}(e^{x}-1)\left(e^{x}+1\right)}{\left(e^{x}-1\right)^{2}}=\frac{e^{x}\left(e^{x}-1\right)-e^{x}\left(e^{x}+1\right)}{\left(e^{x}-1\right)^{2}}$$

$$y'=\frac{e^{2x}-e^{x}-e^{2x}-e^{x}}{\left(e^{x}-1\right)^{2}}=\frac{-2e^{x}}{\left(e^{x}-1\right)^{2}}$$

Ejercicio derivar:

$$y=\frac{e^{3x}-e^{2x}}{3e^{x}}$$

$$y'=\frac{\frac{d}{dx}(e^{3x}-e^{2x})3e^{x}-\frac{d}{dx}3e^{x}(e^{3x}-e^{2x})}{(3e^{x})^{2}}=\frac{(e^{3x}(3)-e^{2x}(2))*3e^{x}-3e^{x}(e^{3x}-e^{2x})}{9e^{2x}}$$

$$y'=\frac{9e^{4x}-6e^{3x}-3e^{4x}+3e^{3x}}{9e^{2x}}=\frac{6e^{4x}-3e^{3x}}{9e^{2x}}=\frac{3(e^{4x}-e^{3x})}{9e^{2x}}=\frac{e^{4x}-e^{3x}}{e^{2x}}$$

Derivada de función exponencial “a”.

Derivada de una función simple.

$$\boxed{\frac{d}{dx}a^{x}=a^{x}Ln.a}$$

Derivada de una función compuesta.

$$\boxed{\frac{d}{dx}a^{f(x)}=a^{f(x)}*\frac{d}{dx}f(x)*Ln.a}$$

Ejercicio derivar:

$$f(x)=3^{\sqrt[3]{x^{2}+1}}$$

$$f'(x)=3^{\sqrt[3]{x^{2}+1}}*\frac{d}{dx}\left(x^{2}+1\right)^{\frac{1}{3}}*Ln.3$$

$$f'(x)=3^{\sqrt[3]{x^{2}+1}}*\frac{1}{3}\left(x^{2}+1\right)^{\frac{-2}{3}}(2x)*Ln.3$$

$$f'(x)=\frac{3^{\sqrt[3]{x^{2}+1}}*(2x)*Ln.3}{3\left(x^{2}+1\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$f'(x)=\frac{3^{\sqrt[3]{x^{2}+1}}*(2x)*Ln.3}{3\sqrt[3]{\left(x^{2}+1\right)^{2}}}$$

Ejercicio derivar:

$$f(x)=2^{\frac{x}{Ln.x}}$$

$$f'(x)=2^{\frac{x}{Ln.x}}*\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{Ln.x}\right)*Ln.2$$

$$f'(x)=2^{\frac{x}{Ln.x}}*\frac{Ln.x-\frac{1}{x}x}{(Ln.x)^2}*Ln.2$$

$$f'(x)=2^{\frac{x}{Ln.x}}*\frac{Ln.x-1}{(Ln.x)^2}*Ln.2$$

Ejercicio derivar:

$$y=2^{e^{x+1}}$$

$$y'=2^{e^{x+1}}*\frac{d}{dx}e^{x+1}*Ln2$$

$$y'=2^{e^{x+1}}*e^{x+1}*Ln2$$

$$y'=0.693\left(2^{e^{x+1}}*e^{x+1}\right)$$

Ejercicios para resolver.

Obtener las derivadas de las siguientes funciones:

1. $y=Logx^2$ 2. $y=Log\sqrt{x-1}$ 3. $y=(x-2)e^x$ 4. $y=e^{5x}$

5. $y=\dfrac{e^{-x}+e^x}{2e^x}$ 6. $y=Log\,\dfrac{x^2}{x+3}$ 7. $y=5^x\,Ln(x+6)$ 8. $y=e^{x^2}+(x^3)^x$

9. $y=Log_4(x-3)$ 10. $y=\dfrac{e^x}{Lnx}$ 11. $y=Ln\left[\dfrac{(x-6)e^{3x}}{x^2-1}\right]$ 12. $y=\dfrac{e^{x^2-4}}{\sqrt{x-7}}$

13. $y=5^{x^3-7}$ 14. $y=\dfrac{5e^{2x}}{xe^{x+2}}$ 15. $y=\dfrac{Log_2x^2}{Log_3x}$ 16. $y=(x^x)^{x^2}$

17. $y=\left(x^2-1\right)^{Lnx}$ 18. $y=\dfrac{Log\left(e^x\right)}{x}$ 19. $y=e^{2x}Ln(x-3)$.

20. $y=Log_3(4x-3)^3$ 21. $y=Ln(Lnx)$ 22. $f(x)=\dfrac{2+Lnx}{2-Lnx}$ 23. $y=\dfrac{x^3-3}{Log_4 x^2}$

24. $f(x)=5^{Lnx^2}$ 25. $f(x)=5^{Tanx}$ 26. $f(x)=5^{\frac{x}{Lnx}}$ 27. $y=\dfrac{x-Senx}{Cosx}e^x$

Determine la ecuación de la recta tangente de las siguientes funciones en el punto dado:

28. $f(x)=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$ en $(0,0)$ 29. $y=Ln\left(x^2-3\right)$ en $x=0$

30. $y=4e^x$ en $x=Ln3$ 31. $y=x+x^2Lnx$ en $x=2$

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Si f(x) es una función derivable, f´(x) será la primera derivada de la función f(x), significa que es derivable, por lo tanto, se pude determinar la segunda derivada y así sucesivamente. Mientras las derivadas cumplan ser funciones continuas y que sean derivables, se podrá encontrar la n-esimaderivada, denominándose derivadas de orden superior.

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}\ (primera\ derivada)$$

A partir de la cuarta derivada, su notación es (4), (5),…o también puede ser y^{IV}, y^{V}, y^{VI}, etc…

$$y'' = f''(x) = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$y''' = f'''(x) = \frac{d\left(\frac{d^2y}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3}$$

$$y^n = f^n(x) = \frac{d^ny}{dx^n} \rightarrow no\ siempre\ existe$$

Ejercicio:

Hallar la derivada enésima de la función e^{2x}

$y = e^{2x}$

$y' = 2e^{2x}$

$y'' = 2^2e^{2x}$

$y''' = 2^3e^{2x}$

$y'^{v} = 2^4e^{2x}$

$y^n = 2^ne^{2x}$

Ejercicio:

Hallar $f^n \ si \ f(x) = \ln(ax+b)$

$$f'(x) = \frac{1}{ax+b}.a = a(ax+b)^{-1}$$

$$f''(x) = -a^2(-1)(ax+b)^{-2} = -a^2(ax+b)^{-2}$$

$$f'''(x) = a^3(-1)(-2)(ax+b)^{-3} = a^3.2(ax+b)^{-3}$$

$$f'^{v}(x) = -a^4(-1)(-2)(-3)(ax+b)^{-4} = -a^4.2(3)(ax+b)^{-4}$$

$$f^n(x) = (1)^{n+1}(n-1)!\,(ax+b)^{-n}$$

Ejercicio:

Hallar $f^3 \ si \ f(x) = \dfrac{x^2+1}{e^x}$

$$f'(x) = \frac{(2x)(e^x) - e^x(x^2+1)}{(e^z)^2} = \frac{2xe^x - x^2e^x - e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(2x - x^2 - 1)}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2 - 1}{e^x}$$

$$f^2(x) = \frac{(2-2x)e^x - e^x(2x - x^2 - 1)}{e^{2x}} = \frac{e^x(2 - 2x - 2x + x^2 + 1)}{e^{2x}} = \frac{-4x + x^2 + 3}{e^x}$$

$$f^3(x) = \frac{(-4+2x)e^x - e^x(-4x + x^2 + 3)}{e^{2x}} = \frac{e^x(-4 + 2x + 4x - x^2 - 3)}{e^{2x}} = \frac{6x - x^2 - 7}{e^x}$$

Ejercicios propuestos.

Obtener las derivadas de las siguientes funciones**:**

1. Hallar las tres primeras derivadas de $y = \dfrac{x}{x^2-3}$
2. Dada la función $y = xe^x$ hallar las tres primeras derivadas.

3. Determine y^4 si $y = x^2e^{2x}$ 4. Determine y'' si $y = e^{x^3}$

5. Determine $y^{''}$ si $y = e^{x^3}$ 6. Determine $y^{''}$ si $y = \frac{x^2 - 1}{e^x}$

7. Determine y^3 si $y = x^3 + e^{4x}$ 8. Determine y^4 si $y = xLnx$

10. Determine y^2 si $y = Ln\frac{(4x-5)(3x+1)}{x+2}$

11. Determine $y^{''}$ si $y = e^{3Ln(x^3+1)}$ 12. Determine $y^{''}$ si $y = (x+1)e^{-x}$

13. Determine y^3 de $y = Ln[(x^2 - 5)(x+2)]$ 14. Determinar y^2 de $y = x^4 + e^{3x}$

15. Encuentre y^2 de $y = (x-1)e^{-2x}$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Una función está escrita en forma explícita, cuando su variable dependiente está despejada así, por ejemplo:

$$y = 3x^2 + x - 5$$
$$y = x^3 - Tan.(2x - 9)$$
$$y = \frac{Ln.(x-8)}{\sqrt[3]{x-2}}$$

Si de lo contrario cuando la variable dependiente, no está despajada se dice que es una función implícita (por lo general la y). Los siguientes ejemplos muestran casos de funciones que están escritas en forma implícita:

$$x^2 y + \sqrt[3]{y} = 2 - xy^3$$
$$Tan.(2x-9) = \frac{xy - 2x^2}{3xy}$$
$$y = arc.sen\sqrt{x^2 - y^4}$$

Regla para derivar una función implícita.

Para resolver una derivada en función implícita se recomienda seguir los siguientes pasos:

1- Derivar ambos lados de la ecuación, con respecto a "x" o "y" a la que se deriva.
2- Realizar la transposición de términos y dejar aquellos que contengan la derivada en el primer término.
3- Factorizar donde esté la derivada.
4- Despejar la derivada.

Una función está en forma implícita cundo no aparece despejada la **y** sino que la relación entre **x** e **y** viene dada por una ecuación de dos incógnitas cuyo segundo miembro es cero

Ejercicio:

Hallar la derivada

$$\frac{d}{dx}$$

$$x + 3yx + 4 = 0$$

$$\frac{d}{dx}x + 3\frac{d}{dx}(x * y) + \frac{d}{dx}4 = \frac{d}{dx}0$$

$$1 + 3(\frac{d}{dx}x * y + \frac{d}{dx}y * x) + 0 = 0$$

$$1 + 3(y + xy) = 0$$

$$1 + 3y + 3xy' = 0$$

$$3xy' = -1 - 3y$$

$$y' = \frac{-1 - 3y}{3x}$$

$$\frac{d}{dy}$$

$$9x - 5y = \frac{5}{2}x^4y^3$$

$$\frac{d}{dy}9x - \frac{d}{dy}5y = \frac{5}{4}\left(\frac{d}{dy}x^4y^3\right)$$

$$9x' - 5 = \frac{5}{4}\left(\frac{d}{dy}x^4y^3 + \frac{d}{dy}y^3x^4\right)$$

$$9x' - 5 = \frac{5}{4}\left(4x^3x\acute{y}^3 + 3y^2x^4\right)$$

$$9x' - 5 = 20x^3x\acute{y}^3 + \frac{15}{4}y^2x^4$$

$$36x' - 20 = 80x^3x\acute{y}^3 + 15y^2x^4$$

$$36x' - 80x^3x\acute{y}^3 = 20 + 15y^2x^4$$

$$x\left(36 - 80x^3y^3\right) = 20 + 15y^2x^4$$

$$x' = \frac{20 + 15y^2x^4}{\left(36 - 80x^3y^3\right)}$$

Ejercicio:

Hallar $\frac{dx}{dy}$ de:

$$x^2y^5 - \ln y + e^{(x+y)} = \cos y$$

$$2xy^5 + x^2 5y^4 y' - \frac{1}{y}y' + e^{(x+y)}.1 + y' = -\sin y\, y'$$

$$x^2 5y^4 y' - \frac{1}{y}y' + e^{(x+y)}.1 + y' + \sin y\, y' = -2xy^5$$

$$y' = \frac{-2xy^5 - e^{(x+y)}}{5x^2y^4 - \frac{1}{y} + e^{(x+y)} + \sin y}$$

Ejercicio. Hallar la derivada:

Sea la función $y^3 - 2xy + 7 = 3x + 1$, hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{d}{dx}y^3 - \frac{d}{dx}2xy + \frac{d}{dx}7 = \frac{d}{dx}3x + \frac{d}{dx}1$$
$$3y^2y' - 2(y + xy') = 3$$
$$3y^2y' - 2y - 2xy' = 3$$
$$3y^2y' - 2xy' = 3 + 2y$$
$$y'(3y^2 - 2x) = 3 + 2y$$
$$y' = \frac{3 + 2y}{3y^2 - 2x}$$

Ejercicios propuestos.

Obtener las derivadas de las siguientes funciones:

1. Hallar la derivada de la siguiente función implícita: 3x – 2y = 4
2. Hallar la derivada de la siguiente función implícita: $(x-5)^2 + (x+2)^2 = 1$

3. Encontrar $\frac{d}{dx}$ si $x^3 + 4xy - 2 = 2y^2$ 4. Encontrar $\frac{d}{dy}$ si $xe^y - x^2y^2 = 1$

5. Encontrar $\frac{d}{dx}$ si $xy - y = 2x^2 - 5$ 6. Encontrar $\frac{d}{dx}$ si $Ln(xy^2) + x = 2$

7. Encontrar $\frac{d}{dy}$ si $ax^2 + by = 2x + cy$ 8. Encontrar $\frac{d}{dx}$ si $x^2 - xy + 5y = 0$

9. Encontrar $\frac{d}{dx}$ si $x^3 + 4xy - 2 = 2y^2$ 10. Encontrar $\frac{d}{dx}$ si $y^2 = Ln(x - y)$

11.Sea la función $y^3 - 2xy + 7 = 3x + 1$, hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$.

12. Encontrar la derivada de *y* suponiendo que la ecuación $(2y^2 + 3)^3 = 5x^3 - 3x$ describe una función derivable y que *y=f(x)*.

ANÁLISIS MARGINAL

El Cálculo Diferencial es el estudio de los cambios que ocurren en una expresión matemática, cuando ocurren variaciones en otras cantidades (variables independientes) de las cuales depende la cantidad original (variable dependiente). Así, por ejemplo:

- El cambio en el costo total de operación de una empresa, resulta de cada unidad adicional producida.
- El cambio de la demanda de cierto producto que resulta de un incremento de una unidad en el precio.
- El cambio del producto nacional bruto de un país por cada año que pasa

La derivada tiene varias aplicaciones en la economía y la administración en lo referente a las "tasas marginales ".

Costo marginal.

Se define como costo marginal a la variación del costo total, ante el aumento de una unidad producida, es decir el costo de producir una unidad adicional.

El costo marginal es un concepto importante en la microeconomía, ya que se utiliza para determinar la cantidad de producción de una empresa y los precios de los productos.

Es claro que el costo marginal no es otra cosa que la derivada de la función del costo con respecto a la cantidad producida.

$$\boxed{COSTOMARGINAL = \frac{dC}{dx}}$$

Marginal, es el precio o coste de cada unidad

El costo marginal mide la tasa con la que el costo se incrementa con respecto al incremento de la cantidad producida.

Costo promedio marginal.

Costo promedio o coste unitario, es el costo de producción por unidad de producto. Se determina dividiendo el total de costos fijos y costos variables para el número total de unidades producidas.

$$\boxed{COSTOPROMEDIO = \frac{C(x)}{x}}$$

Mientras que el costo promedio marginal es igual a la derivada del costo promedio

$$\boxed{COSTOPROMEDIOMARGINAL = \frac{d}{dx}\overline{C(x)}}$$

Ingreso marginal.

Ingreso es el cambio que se realiza en el ingreso total por cada unidad adicional que es venda.

Sabemos que $\boxed{INGRESO = X * P}$

X= Número de unidades Vendidas

P= Precio unitario

Por lo tanto $\boxed{INGRESO.MARGINAL = \frac{d}{dx} I}$

Los ingresos marginales representan las entradas adicionales de una empresa por artículo adicional vendido cuando ocurre un incremento muy pequeño en el número de artículos vendidos. Esto es, la tasa con que crece el ingreso con respecto al volumen de ventas.

Utilidad marginal.

La Utilidad, desde el punto de vista contextual, se puede decir que es la aptitud de un bien o servicio para satisfacer la necesidad humana.

Desde el punto de vista económico $\boxed{UTILIDAD = I_{(x)} - C_{(x)}}$

Utilidad marginal, brinda el consumo de un bien adicional; en términos matemáticos se puede decir que la Utilidad Marginal, es la derivada parcial de la función de la Utilidad con respecto a la cantidad consumida de un bien.

$$\boxed{UTILIDAD - MARGINAL = \frac{d}{dx}U}$$

La utilidad marginal, representa la utilidad adicional por artículo, si la producción tiene un pequeño incremento.

Razón de Cambio Relativo y Porcentual.

Cambio relativo, si tenemos una magnitud R(x), con respecto a x, se define como el cociente

$$CAMBIO - RELATIVO = \frac{CAMBIOQ}{TAMAÑODEQ}$$

La razón del cambio relativo, de una magnitud con respecto a una variable determinada por el cociente

$$RAZON - RELATIVO - DE - CAMBIOQ = \frac{\frac{d}{dx}Q}{Q}$$

$$RAZON - PORCENTUAL - DE - CAMBIOQ = \frac{100 * \frac{d}{dx}Q}{Q}$$

Razón de tasa de cambio.

Para determinar la eficiencia de una persona en realizar una actividad, se pude calcular por la segunda derivada, que proporciona la razón de cambio de la tasa de cambio de la función original**.**

Para determinar la segunda derivada de una función; sólo se calcula la primera derivada y luego se vuelve a derivar

$$RAZON - DE - CAMBIO - DE - TASA = f'(x) - f''(x)$$

Función de consumo.

La función del consumo (C) es la relación entre el nivel de gasto de consumo y el nivel de renta personal disponible. C= f (I) existe una relación con el ingreso nacional total, I, y el consumo nacional, C. Tanto el Ingreso como el consumo se expresan en miles de millones de dólares.

La propensión marginal al consumo, es la razón de cambio del consumo respecto al ingreso.

$$PROPENSION - MARGINAL - AL - CONSUMO = \frac{dC}{dI}$$

La diferencia entre el Ingreso (I) y el Consumo (C) es el Ahorro (S)

S= I – C

Si diferenciamos ambos miembros de la ecuación con respecto a I, tenemos

$$\frac{dS}{dI} = \frac{d}{dI}(I) - \frac{d}{dI}(C) = 1 - \frac{dC}{dI}$$

Si es define $\frac{dS}{dI}$ como la propensión marginal al Ahorro, indicando que cambia muy rápidamente el Ahorro con respecto al Ingreso.

$$\boxed{PROPENSION - MARGINAL - AL - AHORRO = 1 - PROPENSION - MARGINAL - AL - CONSUMO}$$

APLICACIONES PRÁCTICAS DE LAS DERIVADAS

Fórmulas

$\boldsymbol{costo\ marginal} = C(x)' = \frac{d}{dx}(x)$

$\boldsymbol{costo\ promedio} = C\overline{(x)} = \frac{c(x)}{x}$

$\boldsymbol{ingreso}(\boldsymbol{I}(\boldsymbol{x})) = x * p$

$\boldsymbol{Utilidad} = (\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})) = U(x) = I(x) - C(x)$

***x* =** *número de unidades*
***p* =** *precio/demanda*

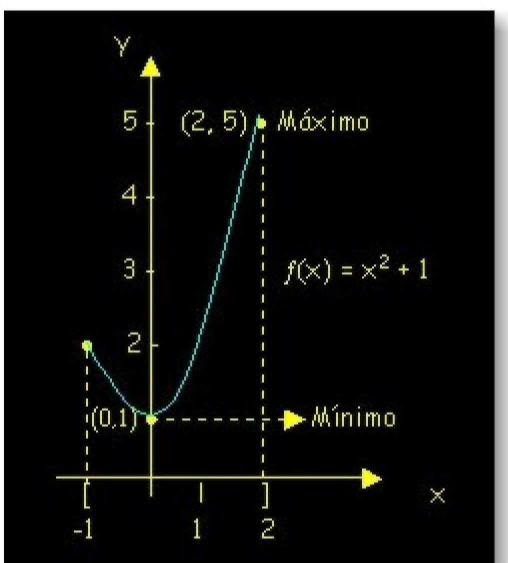
I(x) *=ingreso*

***U(x)* =** *costo*

Siempre que se indique marginal será una derivada

Máximos y mínimos.

Los máximos y mínimos son los mayores o menores valores que alcanza una función en un intervalo dado. También reciben el nombre de valores extremos de la función.



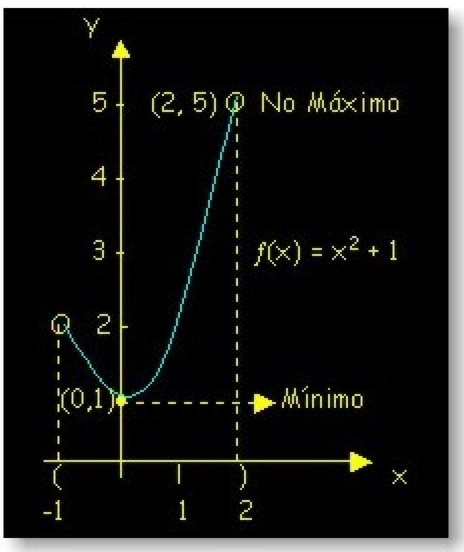
En la figura se observa que la función $f(x) = x^2 + 1$ está definida en el intervalo cerrado $[-1,2]$. Analizando se puede deducir:

$f(c)$ Esel mínimo de la función en el intervalo si $f(c) \leq f(x)$para todo valor de x que se encuentre en el intervalo.

$f(c)$ Es el máximo de la función en el intervalo si $f(c) \geq f(x)$para todo valor de x que se encuentre en el intervalo.

De los conceptos anteriores, se determina que el teorema del valor extremo se refiere a que, si *f* es continua en el intervalo cerrado, entonces la función tiene máximo y mínimo en el intervalo. En la gráfica de una función, un máximo se pude perder en el momento que el intervalo cambie. Es decir, si en lugar de que el intervalo sea cerrado es abierto.

Analizando el siguiente ejemplo:



De la gráfica podemos determinar los conceptos de extremos relativos:

- Si existe un intervalo abierto en que la f(c) tiene un máximo, se denomina que la f(c) tiene un máximo relativo de la función.
- Si existe un intervalo abierto en que la f(c) tiene un mínimo, se denomina que la f(c) tiene un mínimo relativo de la función.
- Los extremos relativos solo se presentan en números críticos.

En una función definida en cualquier número real c, se pueden reconocer puntos críticos de la función cuando *f(c)* = 0, o si la función no está definida en c. Expresado de otra manera se tiene que si la función tiene un extremo relativo en el punto x = c, entonces c será un número crítico de la función.

Ejemplo:

Hallar los extremos de $f(x) = 2x^3 - x^2$ en el intervalo [-1, 2] (puntos terminales)

Se hallan primero los números críticos derivando la función:

$f'(x) = 6x^2 - 2x$ Haciendo $f'(x) = 0$ se tiene que:

$6x^2 - 2x = 0$ factorizando: $2x(3x - 1) = 0$

Se hallan los valores de x igualando a cero cada uno de los factores:

$x = 0$ y $x = 1/3$

Luego entonces los números críticos son $x = 0$ y $x = 1/3$

Ahora evaluando la función en los puntos críticos (0, 1/3) y en los terminales [-1, 2] se determina que:

$f(x) = 2x^3 - x^2$

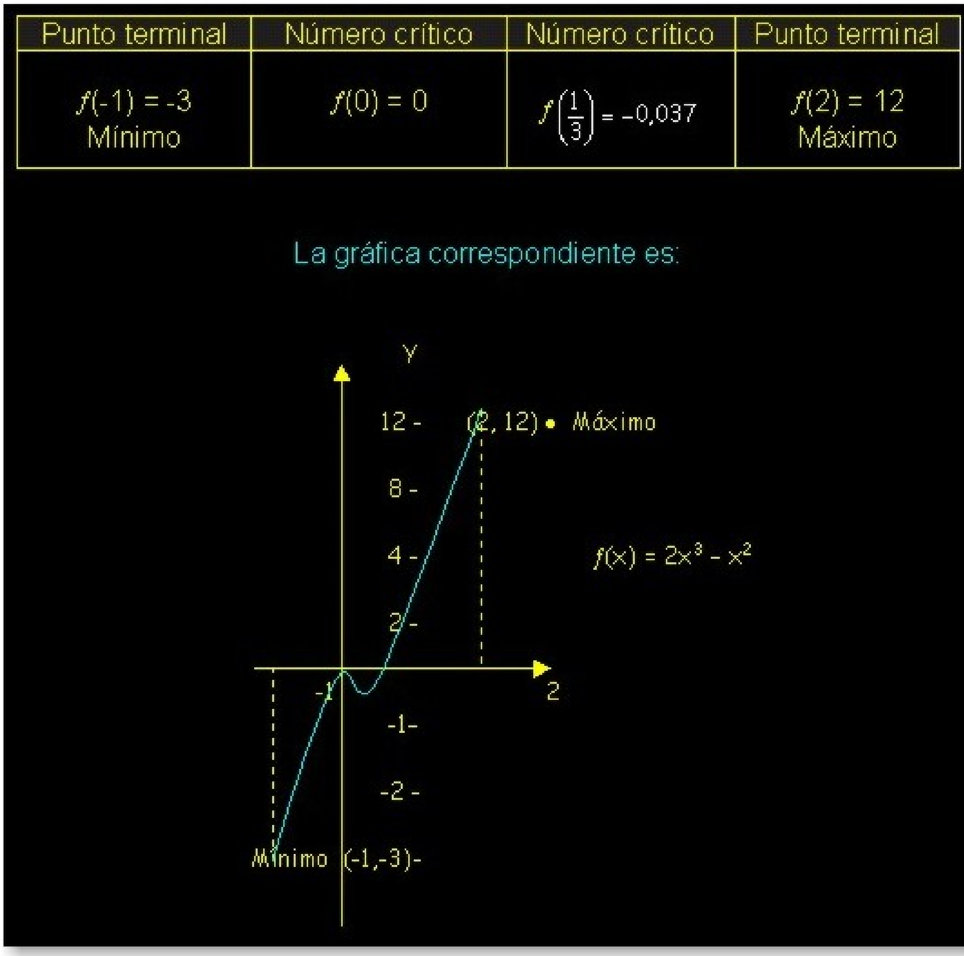
Para $x = 0$ $f(x) = 2(0)^3 - (0)^2 \Rightarrow f(x) = \mathbf{0}$

Para $x = \frac{1}{3}$ $f(x) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{27} - \frac{1}{9} = \frac{2-3}{27} = -\frac{1}{27} = -0{,}037$

Para $x = -1$ $f(x) = 2(-1)^3 - (-1)^2 \Rightarrow f(x) = -2 - 3 = \mathbf{-3}$ *Mínimo*

Para $x = 2$ $f(x) = 2(2)^3 - (2)^2 \Rightarrow f(x) = 16 - 4 = \mathbf{12}$ *Máximo*

Resumiendo, estos valores se tienen:



Punto terminal	Número crítico	Número crítico	Punto terminal
$f(-1) = -3$ Mínimo	$f(0) = 0$	$f\left(\frac{1}{3}\right) = -0{,}037$	$f(2) = 12$ Máximo

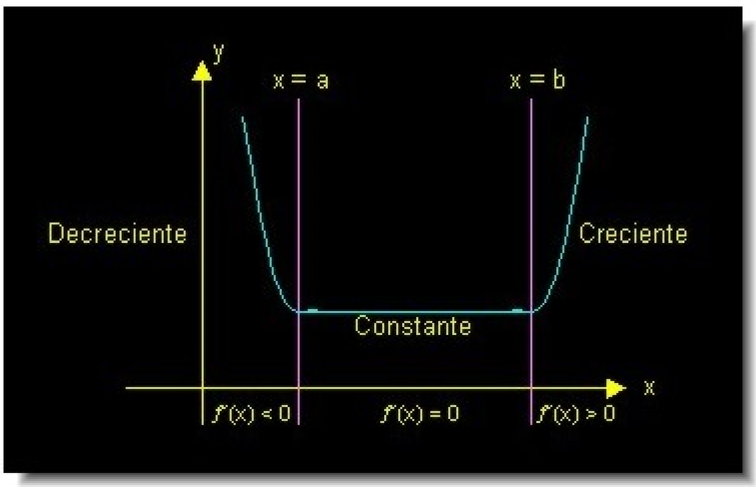
Los procedimientos a seguir para obtener los extremos en un intervalo cerrado son:

1. Se deriva la función para hallar los valores críticos.
2. Estos valores críticos se remplazan en la función original para obtener los valores de “y” determinando los puntos críticos. (x,y)
3. Se evalúa la función en los puntos x, y.
4. El menor de los valores es mínimo y el mayor es máximo.

Funciones crecientes y decrecientes.

Estudiando las derivadas se ha visto que se pueden hallar los puntos máximos y mínimos de una función. También es posible examinar cuando la función es creciente o decreciente.

En la figura:



Una función es creciente si para todo par de números x1 y x2 en el intervalo, se cumple que x1 < x2 y luego *f (x1)* < *f (x2)*. Similarmente, una función es decreciente si para todo par de números x1 y x2 en el intervalo, se cumple que x1 < x2 y luego *(x1)* > *f (x2)*.

Podemos deducir que si una función es derivable en un intervalo (a,b):

Si $f^{'}(c)\rangle 0$, para toda x, en el intervalo $[a,b]$, la función es creciente en este intervalo.

Si $f^{'}(c)\langle 0$, para toda x. en el intervalo $[a,b]$, la función es decreciente en esta intervalo.

Si $f^{'}(c)=0$, para toda x en el intervalo $[a,b]$, existe un punto de inflexión, donde la función ni crece ni decrece, permanece constante.

Concavidad de una función.

La concavidad de la gráfica de una función se refiere donde se curva la gráfica hacia arriba y donde se curva hacia abajo.

Se puede determinar aplicando el criterio de la segunda derivada, si x=c es un punto crítico y al reemplazarlo en la segunda derivada de la función se obtiene un resultado negativo (< 0), entonces la función es cóncava hacia arriba obteniendo un máximo local; mientras si se obtiene un resultado positivo (> 0) la función es cóncavo hacia abajo, obteniendo un mínimo local.

Resumen para determinar extremos bajo el criterio de la segunda derivada.

Paso 1: Encontrar los puntos críticos de la función, valores de x donde la $f'(x) = 0$.

Paso 2: Encontrar la segunda derivada y evaluarlo cuando x= c

Paso 3:

- Si $f''(x) > 0$ la función tiene un mínimo local en x=c.
- Si $f''(x) < 0$ la función tiene un máximo local en x=c.
- Si $f''(x) = 0$ la función no está definida, existe un punto de inflexión, curva cambia de concavidad, es decir cambia de cóncavo hacia arriba a cóncavo hacia abajo o viceversa.

Ejercicios de aplicación.

1. El producto Interno Bruto (PIB) de un país R(x)=$m^2 + 5m + 106$ $mil\ millones$ de dólares t años después de 1999.

   a. ¿Qué razón cambió PIB con respecto al tiempo en 2012?
   b. ¿A qué razón porcentual cambio el PIB con respecto al tiempo en el año 2014

Respuestas.

Literal a

$R(x) = m^2 + 5m + 106 milmillones$

$R'(x) = \frac{d}{dx}m^2 + \frac{d}{dx}5m + \frac{d}{dx}106$

$R'(x) = 2m + 5$

$t = 13$

$R'(13) = 2(13) + 5 = 31000 millones - de - dolares - al - año$

Literal b

$R(x) = m^2 + 5m + 106 milmillones$

$R(13) = (13)^2 + 5(!13) + 106 = 340 mil - millones$

$La - Razón - de - cambio - porcentual$

$100\frac{R'(13)}{R(13)} = 100\frac{106}{340} = 31.17\%$

2. En cierta empresa un estudio de eficiencia para el turno de la mañana, determina que un trabajador promedio, que llega a las 7:00 a.m. ha producido $Q(t) = -t^3 + 6t^2 + 24t$

a. Calcular la tasa de producción del trabajador a las 12:00.

b. ¿A qué razón está cambiando la tasa de producción del trabajador con respecto a las 12:00?

Respuestas:

Literal a

$Q'(t) = -'3t^2 + 12t + 24$

$Q'(5) = -3(5)^2 + 12(5) + 24 = 159 unidades - por - hora$

Literal b

La razón de cambio de la tasa de producción es la segunda derivada

$Q''(t) = -6t + 12$

$Q''(5) = -6(5) + 12 = -28 unidades - por - hora$

El signo negativo indica que la tasa de producción está decreciendo.

3. Encuentre los costos marginales si $C(x) = \sqrt{100 + x^2}$

$$(100 + x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$C'(x) = \frac{d}{dx}(\boldsymbol{x})$$

$$C'(x) = \frac{1}{\cancel{2}}(100 + x^2)^{-\frac{1}{2}} * \cancel{2}x$$

$$C'(x) = x * (100 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$C'(x) = \frac{x}{(100 + x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$x = 200\ unidades$$

$$C'(200) = \frac{200}{(100 + 200^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$C'(200) = \frac{200}{225} = \$0.99$$

4. Determine el $C(\bar{x})$ costo promedio marginal**.**

$$C(x) = 20 + 2x - \sqrt{x^2 + 1}$$

$$C(\bar{x}) = \frac{20 + 2x - \sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

$$C(\bar{x}) = \frac{20}{x} + \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} - \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

$$C(\bar{x}) = \frac{20}{x} + 2 - \frac{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{x}$$

$$C(\bar{x}) = \frac{d}{dx}\frac{20}{x} + \frac{d}{dx}2 - \frac{d}{dx}\frac{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{x}$$

$$C(\bar{x}) = \frac{d}{dx}\frac{20}{x} + \frac{d}{dx}2 - \frac{d}{dx}\frac{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{x}$$

$$C(\bar{x}) = -\frac{20}{x^2} - \frac{1}{x^2(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$C(\bar{x}) = \frac{-20(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + 1}{x^2} - \frac{1}{x^2(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}$$

5. *Determinar el valor de ingreso marginal si la relación en la demanda es*:

$$\boldsymbol{p = \sqrt{100 - 0.1x - 10x^2}}$$

$$\boldsymbol{I(x) = x * p}$$

$$I(x) = x(100 - 0.1x - 10x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$I(x) = \frac{d}{dx}x * (100 - 0.1x - 10x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{d}{dx}(100 - 0.1x - 10x^2)^{\frac{1}{2}} * x$$

$$I(x) = 1 * (100 - 0.1x - 10x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{0.1x + 20x^2}{2(100 - 0.1x - 10x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$I(x) = \frac{2(100 - 0.1x - 10x^2) - 0.1x - 20x^2}{2(100 - 0.1x - 10x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$I(x) = \frac{200 - 0.3x - 40x^2}{2(100 - 0.1x - 10x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

6. Determinar el costo marginal si la función del costo es $C(x) = \sqrt{25 + x + Ln(x+1)}$

$$\boldsymbol{C(x)} = \left(25 + x + Ln(x + 1)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$C(x) = \frac{1}{2}(25 + x + Ln(x + 1))^{-\frac{1}{2}} * \frac{d}{dx}(25 + x + Ln(x + 1))$$

$$C(x) = \frac{1}{2}(25 + x + Ln(x + 1))^{-\frac{1}{2}} * \frac{x + 2}{x + 1}$$

$$C(x) = \frac{1}{2}(25 + x + Ln(x + 1))^{-\frac{1}{2}} * \frac{x + 2}{x + 1}$$

$$C(x) = \frac{x + 2}{2(x + 1)(25 + x + Ln(x + 1)^{\frac{1}{2}}}$$

7. Determinar la utilidad marginal si el costo es$\boldsymbol{C(x) = 400 + x^2}$

$$\boldsymbol{p = 300 - 2x}$$

$$\boldsymbol{I(x) = x * p}$$

$$I(x) = x(300 - 2x)$$

$$I(x) = 300x - 2x^2$$

$$U(x) = 300x - 2x^2 - 4000 + x^2$$

$U(x) = 3x^2 + 300x + 4000$

$U(x) = -6x + 3$

8. Determinar la Utilidad, si la ecuación en la demanda y el costo de cierto artículo es:

$$\boldsymbol{p + 0.1x = 80}$$
$$\boldsymbol{C(x) = 5000 + 20x}$$
$$\boldsymbol{p = 80 - 0.1x}$$
$$\boldsymbol{I = p(x)}$$
$$I = (80 - 0.1)x$$
$$I = 80x - 0.1x^2$$
$$U = 80x - 0.1x^2 - 5000 - 20x$$
$$U = -0.1x^2 + 60x - 5000$$
$$U = 0.2x + 60$$
$$U = 0.2(150) + 60 = \$30$$
$$U = 0.2(400) + 60 = \$ - 2$$

9. Determinar las propensiones marginales al Consumo y al Ahorro, cuando I= 100. La función del Consumo está dada por:

$$C = \frac{4\left(3\sqrt{I^3} + 3\right)}{I + 10}$$

$$C¨= 4\left[\frac{\frac{d}{dI}2I^{\frac{3}{2}}(I+10) - \frac{d}{dI}(I+10)*\left(2I^{\frac{3}{2}}\right)}{(I+10)^2}\right] = 4\left[\frac{\left(2*\frac{3}{2}I^{\frac{1}{2}}\right)(I+10) - 1*\left(2I^{\frac{3}{2}}\right)}{(I+10)^2}\right]$$

$$C = 4\left[\frac{\left(3I^{\frac{1}{2}}\right)(I+10) - 1*\left(2I^{\frac{3}{2}}\right)}{(I+10)^2}\right] = 4*\frac{3\sqrt{I}(I+10) - 2\sqrt{I^3}}{(I+10)^2}$$

$$C = 4\left(\frac{1297}{12100}\right) = 0.428$$

La propensión marginal al ahorro, cuando I=100, es 1- 0.428= 0.572 Esto quiere decir que la nación consume aproximadamente un42.8% y ahorra 57.2%.

10. Para cierto artículo la ecuación de la demanda es $p = 5 - 0.001x$ ¿Determinar el volumen de producción para maximizar el Ingreso? Si el costo de producir los artículos que se venden es $C = 2000 + x$ ¿Calcularlas unidades para que la utilidad sea máxima y el valor de dicha utilidad?

I= xp

$$I = x(5 - 0.001x)$$
$$I = 5x - 0.001x^2$$
$$I' = 5 - 0.002x$$
$$5 - 0.002x = 0$$
$$x = \frac{5}{0.002} = 2500und.$$

Para determinar si este volumen de producción maximiza el ingreso determino la segunda derivada, (si es mayor que cero tengo máximo, menor que cero mínimos y si es igual a cero existe un punto de inflexión)

$$I' = 5 - 0.002x$$
$$I'' = -0.002$$
Significa que el volumen de producción maximiza el ingreso.

Para resolver la segunda pregunta: la tasa de producción o número de unidades que debe producir la empresa para obtener la utilidad máxima, se realiza:

$$U = I - C$$
$$U = 5x - 0.001x^2 - (2000 + x)$$
$$U = 5x - 0.001x^2 - 2000 - x$$
$$U = -0.001x^2 - 4x - 2000$$
$$U' = -0.002x - 4$$
$$-0.002x - 4 = 0$$
$$x = \frac{4}{0.002} = 2000und.$$

$U' = -0.002x - 4$

$U'' = -0.002 \max imiza$

El valor de la Utilidad máxima:

$U = 5x - 0.001x^2 - 2000 - x$

$U_{(2000)} = 5(2000) - 0.0001(2000)^2 - 2000$

$U_{(2000)} = 10000 - 400 - 2000 = \$7600$

11. La función del costo de una fábrica es $C(x) = 2 + x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{24}$ en dólares, donde el nivel de producción esta dad en miles de artículos semanales. Si cada artículo producido se puede vender \$19 cada uno. Determinar:

a) El Ingreso.

b) Volumen de producción para obtener una Utilidad máxima y el valor de la Utilidad.

Resolviendo la pregunta a):

$I = xp$

$I = 5x$

Resolviendo la pregunta b):

$U_{(x)} = I - C$

$U_{(x)} = 5x - 2 - x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{24}$

$U'_{(x)} = 4 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$

$4 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} = 0$

$32 + 4x - x^2 = 0$

$x^2 - 4x - 32 = 0$

$(x-8)(x+4) = 0$

$x - 8 = 0$

$x = 8unid / sem$

$U'_{(x)} = 4 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$

$U''_{(x)} = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$

Remplazando el valor de las unidades en la segunda derivada:

$U''_{(8)} = \frac{1}{2} - \frac{8}{4} = -1.5$ Es un valor negativo, determina que las 8 unidades producen la utilidad máxima.

El valor de la Utilidad máxima:

$$U_{(\max)} = 5(8) - 2 - 8 + \frac{(8)^2}{4} - \frac{(8)^3}{24}$$
$$U_{(\max)} = 40 - 10 + 16 - 21.3$$
$$U_{(\max)} = \$24.7$$

12. Una empresa determino que la fabricación y venta de los bienes que produce está determinada por la ecuación de la demanda $p + 0.003x = 6$, y la función del costo $C = 2 + 1.2x$ determine:

a) El nivel de producción que producirá la máxima utilidad.

b) ¿Cuál es la utilidad máxima?

Para resolver la primera pregunta, se determina el valor del precio (p) y el Ingreso:

$$p + 0.003x = 6$$
$$p = 6 - 0.003x$$
$$I = xp$$
$$I = x(6 - 0.003x) = 6x - 0.003x^2$$

$$U = I - C$$
$$U = 6x - 0.003x^2 - 2 - 1.2x$$
$$U = 4.8x - 0.003x^2 - 2$$
$$U' = 4.8 - 0.006x$$
$$4.8 - 0.006x = 0$$
$$x = \frac{4.8}{0.006} = 800Und.$$

$U' = 4.8 - 0.006x$
$U'' = -0.006$ Es un valor negativo, determina que las 800 unidades producen la utilidad máxima.

Para determinar el valor de la utilidad máxima:

$$U = 4.8x - 0.003x^2 - 2$$
$$U_{(\max)} = 4.8(800) - 0.003(800)^2 - 2$$
$$U_{(\max)} = 3840 - 1920 - 2 = \$1918$$

13. La ecuación de la demanda para un monopolista es $p = 400 - 2x$ y la función del costo promedio: $\overline{C} = 0.2x + 4 + \dfrac{400}{x}$ donde x es el número de unidades y p , $\overline{C}$ se expresa en dólares por unidad. Determinar:

a) El volumen de producción para maximizar la utilidad.

b) El precio de las unidades en que ocurre la utilidad máxima.

c) Calcular la Utilidad máxima.

d) Si como medida reguladora el gobierno impone un impuesto de \$22 por unidad ¿Cuál es el nuevo precio para maximizar la utilidad?

Se debe calcular el costo y el ingreso:

$$\overline{C} = \frac{C}{x}$$
$$C = \overline{C} * x$$
$$C = \left(0.2x + 4 + \frac{400}{x}\right)x = 0.2x^2 + 4x + 400$$
$$I = p * x$$
$$I = x(400 - 2x) = 400x - 2x^2$$

Se determina el volumen de producción para obtener la utilidad máxima

$$U = 400x - 2x^2 - 0.2x^2 - 4x - 40$$
$$U = 396x - 2.2x^2 - 400$$
$$U' = 396 - 4.4x$$
$$396 - 4.4x = 0$$
$$x = \frac{396}{4.4} = 90Und.$$

$$U' = 396 - 4.4x$$
$$U'' = -4.4$$

Es un valor negativo, determina que con las 90 unidades se obtiene utilidad máxima.

Para determinar el precio:

$$p = \frac{I}{x}$$
$$I = 400(90) - 2(90)^2 = 36000 - 16200 = 19800$$
$$p = \frac{19800}{90} = \$220$$

Para calcular la utilidad máxima:

$$U_{(\max)} = 396(90) - 2.2(90)^2 - 400$$
$$U_{(\max)} = 35640 - 17820 - 400 = \$17420$$

El impuesto de \$22 por unidad indica que por cada x unidades, el costo crece en 22x. Las nuevas funciones del costo y Utilidad serian:

$$C = 0.2x^2 + 4x + 400 + 22x$$
$$C = 0.2x^2 + 26x + 400$$
$$U = 400x - 2x^2 - 0.2x^2 - 26x - 400$$
$$U = 374x - 2.2x^2 - 400$$
$$U' = 374 - 4.4x$$
$$374 - 4.4x = 0$$
$$x = \frac{374}{4.4} = 85 unid.$$
$$U'' = -4.4 es \max imo$$

El nuevo precio será:

$$I = 400(85) - 2(85)^2 = 34000 - 14450 = \$19950$$
$$p = \frac{I}{x} = \frac{19950}{85} = \$230$$

Ejercicios propuestos.

1. Un estudio de eficiencia en una empresa determina que trabajador promedio que llega a trabajar a las 7:00 a.m. habrá producido $Q(t) = -2t^3 + 8t^2 + 17t$ unidades.

a) Calcular la tasa de producción del trabajador a las 10:00 a.m.
b) ¿A qué razón cambia la tasa del trabajador a las 10:00 a.m.?
c) Aplicar el cálculo para estimar el cambio de la tasa entre las 10:00 y las 10:30 a.m.
d) Calcular el cambio real en la tasa de producción del trabajador entre las 10:00 y 10:30 a.m.

2. Se proyecta que dentro de "t", tiempo en meses, el precio medio por unidad de artículos en cierto sector de la economía se considera $Q(t) = -2t^3 + 8t^2 + 17t + 300 dolares$

a) ¿A qué tasa se incrementará el precio por unidad con respecto al tiempo de 6 meses?
b) ¿A qué tasa cambiará el incremento de la tasa de precios con respecto al tiempo de 6 meses?
c) Calcular el incremento real de la tasa de precios durante el sexto mes.

3. Calcular el costo marginal y costo promedio marginal de las funciones de costo.

$$C(x) = \sqrt{120 + x^3}$$
$$C(x) = 5 - \frac{42}{x} + 2x^3$$
$$C(x) = 28 - 3x + \sqrt{x+2}$$
$$C(x) = 250x - 5000 + 10^{-3}x^2$$

4. Una empresa vende todas sus unidades producidas a una razón de$5 cada una. El costo total por producir éstas unidades está determinado por la función $C = 30 + 1.4x + 0.002x^2$

a. Escriba la expresión de la utilidad.
b. Determine el volumen de producción para obtener la utilidad máxima
c. Cuál es el costo de la producción para obtener esta utilidad.

5. Para un artículo determinado, la ecuación de la demanda es $p = 6 - 0.002x$ ¿Qué valor de x maximiza el ingreso? Si la función de costo es $C = 3200 + x$ encontrar el valor que maximice la utilidad y calcule dicha utilidad.

6. Para las siguientes funciones de costos y relaciones de la demanda, determinar, la utilidad marginal de cada expresión:

a. $C = 1500 + 9x \quad p = 100 - \frac{1}{2}x$

b. $C = 3000 - x \quad p = 300 - 3x$

c. $C = \sqrt{100} + x \quad p = c - \left(\frac{h}{x}\right)\sqrt{100} + x$

7. El costo de producir x, miles de unidades está dada por la función $C(x) = 2700 + 8x - 4x^2 + 2x^3$, determinar el costo marginal y el costo marginal promedio.

8. La relación de la demanda de cierto producto, son las siguientes, donde x unidades pueden venderse a un precio determinado de cada unidad, determinar el ingreso marginal:

a. $p = 50e^{\frac{-x}{20}}$ **b.** $p = 30 - Ln(x+1)$

9. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^x$ cuando $x = -2$

10. Determinar el costo promedio marginal y su valor dados por x.

$$\overline{C} = \frac{6000e^{\frac{x}{600}}}{x}; \; x = 350. \; x = 700$$

$$\overline{C} = \frac{850}{x} + 3000\frac{e^{\frac{2x+6}{700}}}{x} \quad x = 97 \;\; x = 197$$

11. Para una empresa, la producción diaria x en t-ésimos día de un ciclo de producción está dada por: $x = 500(1 - e^{-0.2t})$ Determinar la razón del cambio de la producción con respecto al tiempo.

12. Para la función del costo $C(x) = \frac{6 + 2x(x+3)}{(x+2)}$, determinar el costo marginal y el costo promedio marginal.

13. Para la relación de la demanda $p = 60 - Ln(x+2)$, determine el ingreso marginal.

14. Para el producto de un monopolista la ecuación de la demanda es $p = 72 - 0.04x$ y la función de costo: $C = 500 + 30x$ ¿A qué nivel de producción se maximiza la utilidad? ¿A qué precio ocurre esto y cuál es el valor de la utilidad máxima?

15. Para un producto la ecuación de la demanda es: $p = 42 - 4x$ y la función del costo promedio es $\overline{C} = 2 + \frac{80}{x}$ Encontrar el precio que maximiza la utilidad.

16. Un fabricante de radiorreceptores determina que su ecuación de la demanda semanal es: $5x = 375 - 2x$ el costo de producción es $400 + 13x + \frac{x^2}{4}$ (dólares) Determinar el volumen de producción que debe producir para obtener una utilidad máxima.

17. Una empresa que produce calcetines y empaca en cajas, desea saber cuál será el número de cajas que deben preparar para minimizar el costo promedio por caja, determine el costo promedio mínimo (con dos decimales). El costo total de producir x cajas es
$C = 3x^2 + 50x - 17xLnx + 120$

18. La función del costo de fabricar un producto está dada por $C = 10 + 28x - 5x + \frac{5x^3}{3}$ y la demanda del producto $p = 2750 - 4x$, se grava con un impuesto $222 por cada unidad producida, donde el fabricante añade al costo de producción. Determinar el nivel de producción (después de creado el impuesto) necesario para maximizar la Utilidad.

19. La función de la demanda es $p = 14e^{-\frac{x}{3}}$ para $0 \le x \le 8$ Determinar el precio y el número de unidades para que los ingresos sean máximos.

20. Una empresa de televisión a cable tiene actualmente 100,000 suscriptores, que pagan mensualmente una cuota de $35. Una encuesta revelo que tendrían 1000suscriptores más por cada $0.25 de disminución de cuota. ¿Para qué cuotas se obtendrá un ingreso máximo y cuantos suscriptores se tendían entonces?

20. Una empresa determina que su ingreso total se determina por $I = 760000 - x^2 + 1000x$
Encontrar:

a) El número de artículos vendidos para maximizar el ingreso total.
b) ¿Cuál es el monto de este ingreso total?
c) Si se venden 1200 artículos cual será el ingreso total.

21. Una compañía determina que puede vender todas sus unidades a que produce a $2 cada una. Se estima que la función del costo de producción (en dólares) es de $C = 1000 + \frac{x}{5000}$ .Encuentre :

a) La expresión de la Utilidad.
b) El volumen de producción que se debe obtener para alcanzar la utilidad máxima.
c) Monto del volumen máximo.

22. La demanda de una empresa se expresa por la función $p = \frac{50}{\sqrt{x}}$ y la del costo promedio es $\overline{C} = 0.50 + \frac{1000}{x}$ Determinar el precio y la producción que aumentan al máximo la utilidad. A este nivel demuestre que el ingreso marginal es igual al costo marginal.

23. Para cierto articulo la ecuación de la demanda es $p = 8 - 0.02x$ ya la función del costo $C = 200 + 2x$ Determinar:

a) El valor del volumen de producción que maximizara el ingreso y la utilidad?

b) Calcular la Utilidad máxima.

BIBLIOGRAFÍA DE CONSULTA

A) BÁSICA

- Laurence D. Hoffmann (2006). Cálculo aplicado para Administración, economía y ciencias sociales. McGrawHill, México. Octava edición

- ARYA, JAGDISH C. y LARDNER, ROBIN W. (2009). Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía. Pearson Educación, México. Quinta edición.

- HAEUSSLER, F., ERNEST JR. (2003). Matemáticas para administración y economía Pearson Educación, México. Décima edición.

- Cuéllar, C. Juan Antonio. (2014). Matemáticas V.DGB. McGrawHill, México. Segunda edición

- Fuenlabra Samuel (2013). Cálculo Diferencial. McGrawHill, México.

- GranVille,w.a. (2006). Cálculo Diferencial e Integral. Granville, w. a. (2006). México. Limusa

B) COMPLEMENTARIA

- Marvin L. Bittnger (2002). Cálculo para Ciencias Económico-Administrativas. Pearson Educación.

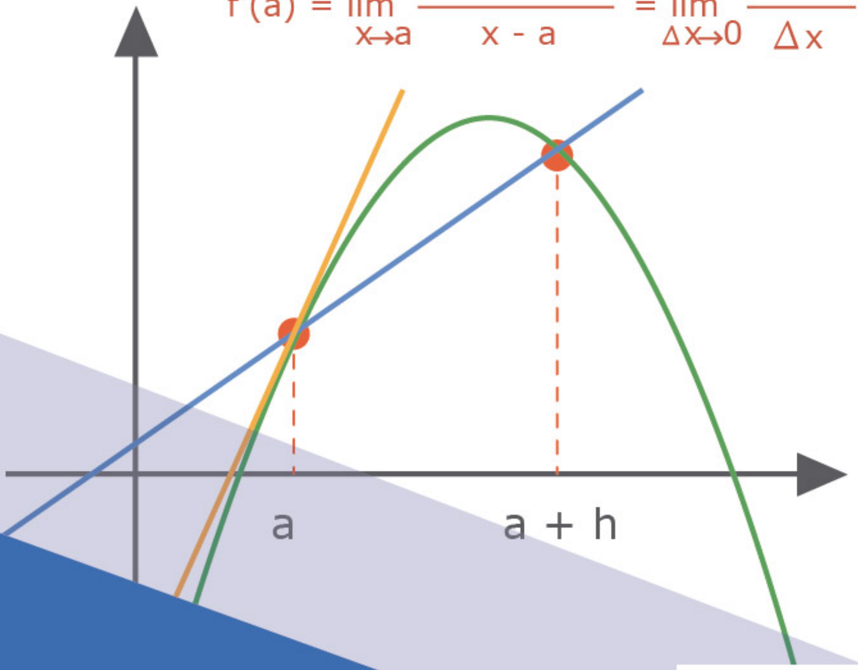
- George B. Thomas. (2010). Thomas Cálculo una Variable. Pearson Educación, México. Undécima edición.

- Insane Mclero. (2010). Administración y Cálculo de tu empresa. Disponible en: http://es.slideshare.net/quique1796/calculo-para-administracin?related=1

Universidad Ecotec

Aplicaciones de la Derivada en economía y administración

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$



Autor
Marco Antonio Jara Riofrío, Mgs.

ISBN: 978-9942-960-06-1