Soporte matemático para el ingreso a la Universidad

Autor: Marco Antonio Jara Riofrío, Mgtr.

Universidad® Ecotec

SOPORTE MATEMÁTICO PARA EL INGRESO A LA UNIVERSIDAD.

AUTOR:

Marco Antonio Jara Riofrío, Mgtr.

2018

TÍTULO

SOPORTE MATEMÁTICO PARA EL INGRESO A LA UNIVERSIDAD

AUTOR:

Marco Antonio Jara Riofrío, Mgtr.

AÑO

2018

EDICIÓN

Mgrt. Nadia Aurora González Rodríguez - Departamento de Publicaciones

Ph.D. Alejandra Mercedes Colina Vargas- Coedición

Universidad ECOTEC

ISBN

978-9942-960-43-6

NO. PÁGINAS

135

LUGAR DE EDICIÓN

Samborondón - Ecuador

DISEÑO DE CARÁTULA

Ing. Annabell Esperanza Aguilar Muñoz - Departamento de Relaciones Públicas y

Marketing. Universidad ECOTEC

Contenido

PRESENTACIÓN

En el documento se presenta, una guía práctica de conocimientos y su aplicación, el cual es una iniciativa para proporcionar a los estudiantes herramientas necesarias para lograr una carrera universitaria exitosa, y así disminuir la deserción, por no contar con los conocimientos básicos que debieron adquirir durante el bachillerato.

El contenido del documento es de nivel introductorio y elemental, desarrollando en aplicaciones sencillas, las experiencias que ha obtenido el autor durante los años de impartir la materia de Pre cálculo, con casos experimentados por los estudiantes durante el proceso de la materia.

El objetivo dotar a los estudiantes del conocimiento matemático que les permita desarrollar las habilidades cognitivas necesarias para la consecución de los aprendizajes que se espera obtengan durante el estudio de esta rama de las matemáticas, involucrando tanto al docente como al estudiante, utilizar una metodología activa y reflexiva, a través de actividades individuales y colectivas logrando que el estudiante adquiera destrezas para interpretar matemáticamente el entorno que le rodea.

El libro está escrito de una manera clara y precisa que ayudará a comprender los temas presentados. Al inicio de un tema, se explican los conceptos principales y se incluyen ejemplos resueltos que permitirán consolidar los conocimientos adquiridos.

Se sugiere que se analice y repase con mucho cuidado los ejemplos resueltos a fin de que comprenda los temas presentados y para que aprenda a resolver ejercicios similares. Esta es una parte muy importante del proceso de autoaprendizaje.

Se estructura en la **primera y segunda unidad**: **Números irracionales, razones y proporciones,** se analiza que los números irracionales provienen de radicales inexactos y que las razones y proporciones son el resultado de comparar dos cantidades. En la **tercera unidad: Introducción al Algebra,** se estudia en primera instancia que, y cuales son expresiones algebraicas, evaluación de sus propiedades. La **cuarta y quinta unidad,** complementa las secciones anteriores, indicando las diferentes operaciones matemáticas a realizarse con monomios y polinomios. Mientras que, en la **sexta unidad,** el estudiante adquiere la habilidad de identificar, aplicar y resolver los diferentes casos de factorización.

En la **séptima unidad,** se analiza las formas de resolver ecuaciones de primer grado y su aplicación. En la **octava unidad,** se dedica a los elementos suficientes del Algebra elemental, que el estudiante necesitara durante su formación. En la **novena y décima unidad: Potenciación y Radicación,** el estudiante analiza y determina la diferencia de las mismas y su aplicación en materias que se utilizaran. Se estudiará la importancia de los logaritmos y sus propiedades, se analizará en la **décima**

primera unidad. Los estudiantes en la **décima segunda unidad,** conocerá la importancia como se grafica una línea recta y cálculo de la pendiente. Por ultimo en la **sección décima unidad,** los estudiantes podrán identificar, que Una función f es una regla que asigna a cada elemento x en un conjunto A Exactamente un elemento, llamado f(x), en un conjunto B."

Se sugiere al lector de esta guía que no deje ningún problema sin resolver, pues cada uno tiene como objetivo construir un sólido base para enfrentarse a los problemas más complejos, no solo en la asignatura sino también en el resto de su carrera. Las matemáticas pueden llegar a ser muy sencillas, sin embargo, no hay manera de llegar a tal punto sin haber trabajado duro. Queda de su parte volverse un verdadero estudiante de la universidad de la excelencia.

Agradezco, a los directivos de la Universidad ECOTEC, en especial el Sr. Decano, compañeros de Facultad de Sistemas por el apoyo moral y técnico logrando plasmar este texto de apoyo a los estudiantes para sus estudios universitarios.

Estimados lectores, aunque este texto fue examinado cuidadosamente, siempre se presentarán errores involuntarios, por lo que agradezco me hagan llegar, todos los errores que detecten, así como sus críticas y sugerencias para mejorar.

El autor.

DEDICATORIA

Al apoyo completo de mi esposa **Lupita** por comprensión y amor, *Eres mi verdadera bendición. Gracias por ser mi compañera y amiga*.

A mis hijos: **Marco y Andrea** que con el soporte y comprensión se logró plasmar este sueño.

Una dedicatoria especial a mi Angelito que Dios me envió, mi nietecito Sebastián "**Los nietos son ese pedacito de cielo que la vida me regaló": Samuel, Alejandra, Sofía, Renato y Sebastián.**

UNIDAD 1. NÚMEROS IRRACIONALES

En matemáticas un número irracional son aquellos que no se pueden presentar como una fracción o razón, sino como un decimal infinito; son el resultado de raíces inexactas.

Así el valor de **Pi,** es número irracional, su valor es 3,1415926535897………. No se definir por ninguna fracción, existiendo algunas con aproximación, pero no es dicho valor.

Por ejemplo, se desea resolver la raíz cuadrada de 3, $\sqrt{3}$, la respuesta es 1,73205080757……..no se encuentra una relación y periodo definido. Estos números se denominan como números irracionales.

Existen números: e (número de Euler), el valor es 2, 7182818284590………..
$\prod$ (Pi) se han calculado, su valor es 3,1415926535897……

1.1 Procedimientos elementales con números irracionales

Suma y resta de números irracionales

Se pueden realizar estas operaciones (Suma y Resta) cuando el resultado se obtiene sea el mismo, es decir que tenga el mismo índice y radicando.

Por ejemplo, se explicará con mayor profundidad en los siguientes ejercicios:

Ejemplo 1:

$4\sqrt{3} + 8\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$ Se tiene una operación combinada de suma y resta.

$12\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$ Se suman todos los términos que tienen $\sqrt{3}$ y se resta los que tengan termino negativo. La respuesta será $10\sqrt{3}$

Ejemplo 2:

$7\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - \sqrt{7}$ Es una operación combinada de suma y resta.

Analizando, no se puede realizar ninguna operación, porque tienen radicales diferente.

Como regla general se puede indicar:

1. Se puede realizar las operaciones indicadas, aquellos términos que tengan la misma base.
2. Se realizarán las operaciones, tomando en cuenta los números fuera de los radicales.
3. Se anotará el resultado de las operaciones como solución final.

Examinando otro ejemplo:

5√7 -8√7 +2 √7 Todos los términos tienen √7 se puede sumar y restar sin ninguna restricción.

5√7 +2√7 - 8√7 = - 1√7 Se obtiene un radical con valor negativo

1.2 Producto de términos irracionales

Una de las propiedades de los números irracionales, se aplica la misma de los radicales, indicando:

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} \quad \text{(o)} \quad \sqrt[n]{b} * \sqrt[n]{a}$$

Se expresa que, si se tiene dos números multiplicándose dentro de un radical, se distribuye la raíz de cada uno de ello y se realiza el producto; también se puede resolver el producto dentro de la raíz y a su resultado obtener la raíz indicada.

Ejemplo 1:

√16*25 = √400 =20   o

√16*25 = √16. √25 = 4. 5 = 20

Se puede resolver directamente, multiplicándolos valores numéricos que están en el radical y al resultado obtener la raíz cuadrada.

Como segunda opción, se puede sacar la raíz cuadrada a cada uno de los números para finalmente multiplicarlos.

Ejemplo 2:

√20*.5 = √20. √5 = √100 = 10

Se está aplicando la segunda opción.

División de números irracionales

Aplica la propiedad de división de radicales: $\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \div b}$ n

$$\sqrt[n]{b} \div \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b \div a}$$

Cundo se tiene raíces de grado n que se estén dividiendo, se puede separar y luego dividir, o primero obtener las raíces en forma individual y luego realizar la división indicada.

Ejemplo1:

$$\sqrt[3]{125} \div \sqrt[3]{27} = 5 \div 3 = 1.66$$

Se extrae las raíces cúbicas para luego dividir los resultados.

Ejemplo 2:

$^2\sqrt{}16 \div {}^2\sqrt{}4 = {}^2\sqrt{}16 \div 4 = {}^2\sqrt{}4 = 2$

Se resolvió primero la división de las cantidades subradicales y luego se obtiene la raíz cuadrada del resultado de la división.

Potenciación de números irracionales

Se convertirá el radical en potencia, pasando el grado del radical a dividir al exponente.

Ejemplo 1:

$$\sqrt{5^4} = 5^{\frac{4}{2}} = 5^2 = 25$$

El grado del radical, que es 2, se pasa a dividir al exponente (en este caso 4). El resultado de esta división (4÷2 = 2) es el nuevo exponente para la cantidad su radical (en este caso 2). Luego se realiza la potenciación.

Ejemplo 2:

$$\left(\sqrt[3]{6}\right)^6 = 6^{\frac{6}{3}} = 6^2 = 36$$

Se realizó el mismo procedimiento del caso anterior.

Operaciones combinadas con radicales

Cuando no se puede resolver una operación de suma y/o resta entre números irracionales, dependerá de en base a conocimientos básicos matemáticos para proceder en forma correcta la resolución del ejercicio.

Por ejemplo: $2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{250}$

Supuestamente no se puede resolver, porque los radicales son diferentes, pero utilizando las propiedades de la multiplicación, se puede resolver este ejercicio.

$\sqrt[3]{54}$ se puede escribir como $\sqrt[3]{27*2}$.

Resolviendo la parte que tiene raíz cúbica exacta. = 3
La parte que no tiene raíz cúbica exacta queda igual: $\sqrt[3]{2}$

Lo mismo se realiza para : $\sqrt[3]{250}$

$$\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{125*2} = 5\sqrt[3]{2}$$

Reemplazando los valores obtenidos:

$2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} = 10\sqrt[3]{2}$

UNIDAD 2. RAZONES Y PROPORCIONES

Las razones y las proporciones son el resultado de confrontar dos cantidades.

Se examinará cada una de ellas y además se verá su aplicación más conocida: la regla de tres.

2.1 Razón o Relación

Es el Vínculo entre dos magnitudes que se pueden comparar entre sí. Es el resultado de comparar dos cantidades, la primera de ellas llamada antecedente y la segunda llamada consecuente. Estas cantidades se presentan en forma fraccionaria o como números decimales, de la siguiente manera:

$$\frac{\text{antecedente}}{\text{consecuente}}$$

Por ejemplo: la razón de 7 a 4, el antecedente será 7 y el consecuente será 4.

La razón quedara: 7/4 o 1,75

2.2 Proporciones

Es la simetría o equilibrio ente dos componentes de un todo. Se denomina de esta manera, cundo se tiene una pareja de razones que son iguales.

Por ejemplo, Las razones 3 es a 4 y 6 es a 8.

Se escribirán: 3/4 y 6/8

Comparando (como si se tratara de fracciones comunes):

$\frac{3}{4}\quad\frac{6}{8}$ Cuando se realiza la comparación de fracciones, se aplica la multiplicación cruzada.

Se tiene entonces que 3*8=24 y 6 *4 = 24

Como los resultados son iguales (en ambos casos es 24) se concluye que son fracciones equivalentes, igualmente están formando una proporción. La proporción se lee 3 es a 4 como 6 es a 8.

En las proporciones se determinan los extremos y los medios. Extremos para este ejemplo son 3 y 8 (en rojo), y los medios son 6 y 4 (en azul).

2.3 Magnitudes Proporcionales

Las magnitudes proporcionales pueden ser de dos clases:

Magnitudes Directamente Proporcionales

Se dice que dos magnitudes son directamente proporcionales, si al multiplicar o dividir una de ellas, la otra magnitud queda multiplicada o dividida por el mismo número.

Por ejemplo si tenemos: $\frac{8}{5}$

Se quiere formar una proporción, entonces se tiene que multiplicar o dividir por el mismo número tanto a 8 como a 5:

$$\frac{8}{5} \rightsquigarrow \times 3 \rightsquigarrow \frac{24}{15}$$

Se ha formado: $\frac{8}{5} = \frac{24}{15}$

Son magnitudes directamente proporcionales:

- El tiempo y las unidades de trabajo (a mayor tiempo, mayor trabajo realizado)

-La cantidad y el precio (a mayor cantidad, mayor precio)

- El peso y el precio (a mayor peso, mayor precio)

- El tiempo de trabajo y el sueldo de un trabajador (a mayor tiempo, mayor sueldo)

- El espacio con la velocidad (se recorre mayor distancia si la velocidad es mayor)

- El espacio con el tiempo (se recorre mayor distancia en mayor tiempo)

Magnitudes Inversamente Proporcionales

Dos magnitudes son inversamente proporcionales, si al multiplicar por un número, la otra queda dividida por el mismo número; o dividiendo a una de ellas por un número, la otra debe ser multiplicada por el mismo número.

Por ejemplo si tenemos: $\frac{5}{8}$

Se desea formar una proporción (empleando el criterio de magnitudes inversamente proporcionales:

5 ~> ÷5 ~> 1 Nota: mientras una cantidad aumenta la otra disminuye.
8 ~> x5 ~> 40

Son magnitudes inversamente proporcionales:

- El número de obreros y el tiempo para realizar una obra (más obreros, menos tiempo)

- Las horas de trabajo y los días que se trabaja (más horas, menos días)

- La velocidad y el tiempo (a mayor velocidad, menor tiempo en recorrer una distancia)

2.4 Regla de Tres Simple

La regla de tres simples es una operación matemática que ayuda a resolver problemas de proporcionalidad, existe dos clases de regla de tres simples:

Regla Directa

La regla de tres simples directos, se fundamenta en una relación de proporcionalidades.

Por ejemplo, Se necesita 9 litros para pintar 2 habitaciones, ¿Cuántos litros se necesita para pintar 4 habitaciones?

Supuesto 2 habitaciones ~> 9 litros
Pregunta 4 habitaciones ~> x

Para hallar el valor de x, se multiplica en forma cruzada los datos, obteniendo:

Supuesto 2 habitaciones ~> 9 litros
Pregunta 4 habitaciones ~> x 9*4=36

Y ahora se divide la cantidad obtenida entre el número que aún no se había empleado:

Supuesto 2 habitaciones ~> 9 litros
Pregunta 4 habitaciones ~> x
36 ÷ 2 = 18

Como conclusión, con 18 litros de pintura, se puede pintar 4 habitaciones.

Regla Inversa

La regla de tres simples inversas, se utiliza para magnitudes inversamente proporcionales.

Por ejemplo, 5 obreros hacen una pequeña construcción en 13 días, ¿Cuántos días demoraran 8 obreros?

Supuesto 5 obreros ~> 13 días
Pregunta 8 obreros ~> x

Para hallar el valor de x, se debe multiplicar directamente los datos que se tienen:

Supuesto 5 obreros ~> 13 días
Pregunta 8 obreros ~> x $5 \times 13 = 65$

Y ahora dividimos la cantidad obtenida entre el número que aún no se habían empleado:

Supuesto 5 obreros ~> 13 días
Pregunta 8 obreros ~> x $65 \div 8 = 8{,}125$

Se concluye que 8 obreros completarán el trabajo en 8,125 días.

2.5 Regla de Tres Compuesta

Se emplea cuando hay una relación de tres o más magnitudes, de tal manera que, relacionando las magnitudes conocidas, se obtienen las desconocidas. La regla de tres compuesta es una sucesión de reglas de tres simples. Es una aplicación sucesiva de la regla de tres simple, por ello es recomendable hacerlo por partes.

Ejemplo:

5 hombres adelantan 90 metros en una obra en 20 días, ¿cuántos días necesitarán 7 hombres para avanzar 70 metros de la misma obra?

Se determina en el ejemplo:

Supuesto 5 hombres ~> 90 metros ~> 20 días
Pregunta 7 hombres ~> 70 metros ~> x

Se concluye que la relación entre cantidad de hombres y días trabajados está formando una regla de tres simple inversa (a mayor cantidad de hombres menos días), entonces podríamos decir: $\frac{5 \times 20}{7}$

Se conoce que la cantidad de hombres y la cantidad de trabajo avanzada forman una regla de tres simples directas (a mayor cantidad de hombres, más trabajo se puede realizar, entonces:

$$\frac{5 \times 20 \times 70}{7 \times 90} = \frac{7000}{630} = 11.1$$

Por lo tanto, el trabajo se realizará en 11 días, redondeando.

UNIDAD 3. INICIO DEL ALGEBRA

Se examinará primeramente qué, y cuáles son expresiones algebraicas, se analizará sus propiedades y se realizará ejercicios.

3.1 Expresiones algebraicas

Una expresión algebraica es una combinación de letras y números unidas por signos de las operaciones matemáticas: suma, resta, multiplicación, división y potenciación.

Por ejemplo, la expresión $9a^2b^2d$ es una expresión algebraica, en este caso un monomio, tiene como parte numérica al número 9 y como parte literal a^3b^2d.

Existen primordialmente dos tipos de expresiones algebraicas:
Monomios y Polinomios

Monomios

El monomio es una expresión algebraica donde aparece entre las variables, las únicas operaciones que son el producto y la potencia del exponente natural.

Ejemplos de monomios:

$12x^4y^2$ Como se puede ver es una sola expresión con parte numérica y parte literal.
$5a^3b^2cd$ En este caso la letra (c y d) no tienen exponentes, cuando esto suceda se asume que dicho exponente es 1, así: $5a^3b^2c^1\ d^1$

m2n3 Aparentemente no hay una parte literal, cuando esto sucede, se sabe que hay un 1, así: 1m2n3

Polinomios

En matemáticas a la suma o resta de dos o más monomios se denomina polinomio.

Ejemplos de polinomios son:$5x^2y +8x^3y^2$

Es un polinomio de dos términos o binomio. Aunque las partes literales aparentemente son iguales, estas son diferentes, pues los exponentes no son iguales.

$4x^4 + x^3y^2 - 5y^2z$ Es un polinomio de tres términos o trinomio.

$a^3 - a^2b + 6ab^2 - 4b^3$ Otro ejemplo de polinomio.

Grados relativo y absoluto

Una expresión algebraica, se identifica por grados relativos (están relacionadas con cada letra de la expresión algebraica) y un grado absoluto (referido a toda la expresión).

En un monomio

Grado Relativo: El grado relativo de un monomio son los exponentes cada variable.

Ejemplo

$3a^9b^5$ Se tiene dos letras, entonces existen dos grados relativos, uno con respecto a la letra a y otro con respecto a la letra b. En ambos casos el grado relativo no será otra cosa que el exponente que afecta a cada letra.

La parte numérica no tiene ninguna importancia.

GR(a) = 9 (el Grado Relativo con respecto a la letra a es 9)
GR(b) = 5 (el Grado Relativo con respecto a la letra b es 5)

X^8y^2z En este caso debemos recordar que la letra sin exponente llevará un 1: $x^8y^2z^1$

GR(x) = 8 (el Grado Relativo con respecto a la letra a es 8)
GR(y) = 2 (el Grado Relativo con respecto a la letra a es 2)
GR(z) = 1 (el Grado Relativo con respecto a la letra a es 1)

Grado Absoluto: El grado absoluto de un monomio se obtiene sumando los exponentes de las variables

Analizando los mismos ejemplos del caso anterior:

$3a^9b^5$ El Grado Absoluto de un monomio, no es otra cosa que la suma de los exponentes de todas y cada una de las letras.
En este caso se sumará el exponente de la letra “a” con el exponente de la letra “b”.
GA = 9 +5 = 14 (el Grado Absoluto es 14)

X^8y^2z Recordamos que el exponente de la letra y es 1: X^8y^2z
GA = 8 +2 +1 = 11 (el Grado Absoluto es 11)

En un polinomio

Grado relativo: Se considera el mayor de los exponentes de cada variable

Ejemplo

$7a^8b^6 +3a^5b$ Este ejemplo es un binomio.

Los grados relativos están relacionados con el número de letras que tenga la expresión algebraica. En este ejemplo se tiene dos grados relativos.

$7a^8b^6 +3a^5b$ Antes de seguir trabajando se completa los exponentes que "no se ven"

$7a^8b^6 +3a^5b$ Para el caso de la letra "a", tiene como exponente 8 y el exponente 5. Se debe tomar como Grado Relativo con respecto a la letra a al mayor de estos exponentes (en este caso 8)

GR(a) = 8 (Grado Relativo con respecto a la letra a es 8)

$7a^8b^6 +3a^5b$ Para la letra "b" se realizará lo mismo que la letra" a", es decir, se comparan los exponentes que afectan a dicha letra (en este caso los exponentes son 6 y 1) debiendo considerar el de mayor como Grado Relativo (en este caso 6).

GR (b) = 6 (Grado Relativo con respecto a la letra b es 6)

Observación: los grados relativos no son necesariamente del mismo término, pueden ser de diferentes términos como el ejemplo analizado.

Grado absoluto: Es lo que tienen mayor suma de los exponentes de cada monomio

Ejemplo:

$7a^8b^6 +3a^5b$ Este ejemplo es un binomio, tendrá un solo Grado Absoluto.

$7a^8b^6 +3a^5b$ Se trabaja independientemente cada termino y se adiciona los exponentes, en el primer término, obteniendo los exponentes 8y 6, mismos que sumados dan 14.
$7a^8b^6 +3a^5b$ Se realiza el mismo procedimiento con el segundo término, siendo los exponentes 5 y 1, mismos que sumados dan 6.

$7a^8b^6 + 3a^5b$ El grado absoluto, es la suma que, de un resultado mayor, en este caso entre el 14 y el 6, se establece que es 14.

GA = 14 (el Grado Absoluto es 14)

3.2 Polinomios Completos

Polinomio completo son aquellos que tienen todos los términos, desde el término independiente hasta el término que tiene la variable de mayor grado, o viceversa.

Ejemplo, el polinomio: $4x^4 - 2x + 8x^5 + 2x^2 - 3x^3 + 5$, evaluar si este es completo, para, lo cual se debe observar los exponentes.

Al término en el cual la letra x no tenía exponente se coloca el 1 que correspondía. Cuando se analiza un número solo (como en el ejemplo es el número 5), a este se le llama término independiente y se asume que lleva la misma letra que los demás términos elevado a exponente 0.

Se observa que los exponentes, el más alto es 5 (en el término $+8x^5$), y estarán también el 4, el 3, el 2, el 1 y el 0. Es decir, entre el 5 y el 0 estarán todos los números consecutivos, entonces se saca como conclusión que se trata de un polinomio completo.

3.3 Polinomios Ordenados

Analizando el ejemplo anterior, se determina que los exponentes del polinomio están todos los números consecutivos entre el 0 y el 5, pero están en completo desorden.

El polinomio era (luego de completarlo$4x^4 - 2x + 8x^5 + 2x^2 - 3x^3 + 5$,

Empieza con exponente 4, luego bajaba a exponente 1, sube al exponente 5, baja al exponente 2, subía a exponente 5 y finalmente bajaba a exponente 0.

Analizando ahora el siguiente polinomio: $4a^2 + 2a^3 - 3a^5 + 5a^8$
Ciertamente no es un polinomio completo, pero observando sus exponentes.

Empieza con exponente 2, luego sube a exponente 3, sube a exponente 5 y finalmente sube a exponente 8. Es decir, los exponentes van subiendo; si esto sucede se determina que es un polinomio ordenado ascendente.

También puede haber un polinomio ordenado en forma descendente:

$4x^6 + 3x^5 - 7x^2 + x$, el cual, después de completarlo quedaría: $4x^6 + 3x^5 - 7x^2 + x^1$
Nótese que los exponentes van disminuyendo, será entonces un polinomio ordenado descendente.

Además, existe un tipo muy especial de polinomio que comparte las características de un polinomio completo y de un polinomio ordenado, a este se le conoce como polinomio completo y ordenado.

Ejemplo:

$3x^6 + 4x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 7x^2 + 3x - 1$, que es lo mismo que decir, $3x^6 + 4x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 7x^2 + 3x - 1$

En este ejemplo se observa, primero que están todos los exponentes consecutivos del 0 al 6; además que los exponentes están ordenados en forma ascendente ya que siempre van subiendo. Se trata de un polinomio completo y ordenado.

3.4 Polinomios Homogéneos

Los polinomios homogéneos son aquellos que tienen todos sus términos o monomios con el mismo grado.

Ejemplo

$8a^2b + 7ab^2 - 8abc$, es un polinomio de tres términos:

El primero de ellos es $8a^2b$,
El segundo es $+ 7ab^2$
El tercero es -.8abc

Sumando los exponentes de cada término:

Primer término: $8a^2b^1$, sumados los exponentes 2 +1 =3
Segundo término: $+7a^1b^2$, sumados los exponentes 1 +2 = 3
Tercer término: $-8a^1b^1c^1$, sumados los exponentes 1 +1 +1 = 3
Se determina que en todos los casos el resultado de la suma de los exponentes de cada término es el mismo (para el ejemplo es 3), por lo tanto, se puede decir que se trata de un polinomio homogéneo.

Además, existe un polinomio que reúne características de un polinomio completo, polinomio ordenado y de un polinomio homogéneo. A este se le denomina polinomio completo, ordenado y homogéneo.

Ejemplo:

$5a^4 - 3a^3b + 2a^2b^2 + 4ab^3 - 5b^4$

El polinomio anterior se puede escribir también de la siguiente manera:

$5a^4b^0 - 3a^3b^1 + 2a^2b^2 + 4a^1b^3 - 5a^0b^4$

Se completa los términos donde no había una de las letras con esta elevada a exponente 0, y colocado el exponente 1 en donde no había exponente.

Analizando primero para la letra "a": están todos los exponentes consecutivos del 4 al 0, y además están ordenados.

Ahora para la letra "b": también están todos los exponentes consecutivos del 0 al 4 y además están ordenados. Se puede afirmar que se trata de un polinomio completo y ordenado.

Valorando la suma de los exponentes término por término:

Primer término	4 +0 =4.
Segundo termino	3 +1 =4;
Tercero termino	2 +2 =4;
Cuarto termino	1+3=4 =4;
Quinto y último término	0 +4 =4.

Se establece que todos los resultados son iguales, indicando que se trata de un polinomio homogéneo.

Se determina que el polinomio: $5a^4 - 3a^3b + 2a^2b^2 + 4ab^3 - 5b^{4,}$ es un polinomio completo, ordenado y homogéneo.

Ejercicios

- Hallar los grados relativos y el grado absoluto de los siguientes monomios:

a) $8ab^4c^2d^2$	**Solución**: $8ab^4c^2d^2$ GR(a) = GR(b) = GR(c) = GR(d) = GA =	b) $2mn^8$	**Solución**: $2m^1n^8$ GR(m) = GR(n) = GA =	c) $3x^4y^2z^6$	**Solución**: $3x^4y^2z^6$ GR(x) = GR(y) = GR(z) = GA =

- Hallar los grados relativos y el grado absoluto de los siguientes polinomios:

a) $4x^2y -5xy^3 +3xyz$

Solución:
$4x^2y^1 -5x^1y^3 +3x^1y^1z^1$
GR(x) =
GR(y) =
GR(z) =
GA =

b) $b^3 -2a^2b^2 +3a^3c$

Solución:
$3b^4 -8a^5b^2$
$+6a^3c^2$
GR(a) =
GR(b) =
GR(c) =
GA = 4

- **Determinar qué características tienen los siguientes polinomios:**

a) $3x^2 +5x^4 -3x +2 -x^3$

b) $2a^4 -3a^2 +a$

c) $3a^4 +a^2b^2 - 5xy^3$

d) $5 +3x +2x^3 -x^5$

e) $3a^4 -a^3b +2a^2b^2 +5ab^3 -b^4$

f) $3x^5 +x^4 -2x^3 +3x^2 -x +1$

UNIDAD 4. OPERACIONES ALGEBRAICAS CON MONOMIOS

Conociendo que, y cuáles son las expresiones algebraicas, es necesario trabajar con ellas. Para lo cual se debe analizar los conceptos de términos semejantes y luego evaluar las operaciones algebraicas con monomios.

4.1 Términos semejantes

Términos semejantes son aquellos que concuerdan sus literales con sus respectivos exponentes.

Por ejemplo, Analizando las siguientes expresiones algebraicas:

a) $7x^7y^2$ b) $5x^7y^2$

Se establece que en ambos monomios se repiten la expresión literal, en los dos monomios se repiten "x" y "y" con diferentes exponentes. Se concluye que cuando la parte literal en dos o más monomios son iguales, se dice que son términos semejantes.

No interesará el orden de las letras en la parte literal, así, los monomios:
$8a^2b^3c$, $2cb^3a^2$, son términos semejantes pues en ambos se encuentran a, b y c.

4.2 Suma y resta de monomios

Como regla general, se indica que solo los términos semejantes se pueden sumar o restar.

Procedimiento:

1- Se agrupan términos semejantes.
2- Se suman o resta los coeficientes numéricos,
3- Como resultado se coloca la parte literal anteponiendo su coeficiente numérico.

Ejemplo Sumar los monomios:

a) $5m^3n$ b) $4m^3n$

Primero se evalúa si son términos semejantes: se observa que m^3 se encuentra en ambos monomios, y que n^1 también está en ambos términos, llegando a la conclusión que son términos semejantes y por ende se podrán sumar:

$5m^3n + 4m^3n$ se suma la parte numérica

$5m^3n + 4m^3n = 9m^3n$ será el monomio respuesta

Similar será el trabajo en la resta, por ejemplo, restar: $5x^4y^2 - 2x^4y^2$

Se evalúa primeramente si son términos semejantes.

Se observa que en ambos casos existe el termino x^4 y también el término y^2, por lo tanto, serán términos semejantes.

Se procede a la resta:

$5x^4y^2 - 2x^4y^{2,}$ se resta solamente la parte numérica

$5x^4y^2 - 2x^4y^{2=} 3x^4y^2$ será el monomio respuesta

En términos que no son semejantes, no se podrán sumar ni restar los términos, por ejemplo, $6a^4b + 3a^2b$, no son términos semejantes, mientras que en uno de ellos se encuentra a^2 en el a^4; la respuesta de esta suma quedaría solamente la misma expresión original: $6a^4b + 3a^2b$

4.3 Multiplicación de monomios

La multiplicación de monomio, no es que otro monomio semejante que tendrá como coeficiente numérico el producto de los coeficientes de los monomios y la parte literal se obtiene multiplicando las potencias que tengan la misma base, es decir, sumando los exponentes.

Ejemplo. Multiplicar: a) $4x^2y^3$ b) $6x^5y^2z$

Separar la parte numérica y literal.

Se evalúa la parte numérica:

$(4x^2y^3)(6x^5y^2z)$ la parte numérica será igual 4*6=

En la parte literal se debe determinar las letras que se repiten, porque los términos que tengan las bases iguales, sus exponentes se suman.

Se repite la letra x, y luego la letra y:

$(4x^2y^3)(6x^5y^2z)$ la letra x, suma los exponentes 2+5 = 7

$(4x^2y^3)(6x^5y^2z)$ se suma los exponentes de la letra y, 3+2 = 5

$(4x^2y^3)(6x^5y^2z)$ la letra z no se repite por lo cual solo la colocare tal como está.

La respuesta será: $24x^7y^5z$

Es importante recordar que la parte numérica se multiplica y en la parte literal se suman los exponentes de las letras que se repiten.

4.4 División de monomios

La división de monomios es otro monomio que tiene como coeficiente numérico el cociente de los coeficientes y como literal la división de las potencias que tienen la misma base y el exponente es la resta de los mismos.

Ejemplo dividir los monomios, $24a^4b^4c^5d^6$ entre $8b^3c^4$

Nota; es importante identificar y comprobar que en el divisor deben existir los mismos literales que el dividendo, caso contrario no se puede realizar la división.

Resolviendo se tiene: $24a^4b^4c^5d^6 \div 8b^3c^4$
Se divide la parte numérica: $24 \div 8 = 3$

En la parte literal, restar los exponentes de las letras que se repiten, en este caso, la letra b y la letra c:

$24a^4b^4c^5d^6 \div 8b^3c^4$ se resta: $4 - 3 = 1$
$24a^4b^4c^5d^6 \div 8b^3c^4$ se resta: $5 - 4 = 1$

La respuesta final será: $3a^4bcd^6$ (el exponente 1 de la letra b no se pone, por no ser necesario).

En algunos casos la letra "desaparecerá", esto ocurrirá cuando su exponente resulte 0 (cero). Por ejemplo en: $5a^2b^2 \div ab^2$ (al restar los exponentes para la letra b dará como resultado 0: $2 - 2 = 0$)
El resultado para este caso será: 5ª

UNIDAD 5. OPERACIONES CON POLINOMIOS

Las operaciones con polinomios, son los procedimientos aritméticos o algebraicos que partiendo de uno o más polinomios, se obtiene como resultado otro polinomio según las operaciones que se realicen.

Es importante recordar ciertos conceptos, tales como términos semejantes, para lo cual se analizará con las siguientes expresiones algebraicas:
a) $5x^2y^3$ b) $8x^2y^3$

En ambos términos se repiten la parte literal, en ambos monomios hay x^2, así mismo, en ambos monomios hay y^3.

Cuando la parte literal en dos términos son iguales, se indica que son términos semejantes. No importara el orden de las letras en la parte literal, así, los monomios, así, por ejemplo:
a) $6a^3b^2c$ b) cb^2a^3

Son términos semejantes pues en ambos encontramos a^3, b^2 y c^1.

5.1 Suma y Resta de Polinomios

Para sumar o restar polinomios, primero se debe identificar los términos semejantes del polinomio y luego combinar de acuerdo a las operaciones indicadas, todo lo demás quedarán exactamente iguales.

Sumar los polinomios siguientes:
P1: $6x^3y + 8xy^2$
P2: $2x^3 - 4x^3y + 3xy^2 - 2y^3$

P1 + P2= $6x^3y + 8xy^2 + 2x^3 - 4x^3y + 3xy^2 - 2y^3$

Verificar si hay términos semejantes:

P1 + P2 = $6x^3y + 8xy^2 + 2x^3 - 4x^3y + 3xy^2 - 2y^3$:
(Se marca con rojo los términos que tienen x^3y, hemos marcado con azul los términos con xy^2)
Resolver los términos con x^3y: $6x^3y - 4x^3y = 2x^3y$
Resolver los términos con xy^2: $8xy^2 + 3xy^2 = 11xy^2$

Introducir los resultados parciales en el polinomio respuesta:

P1 + P2= $2x^3y+11xy^2+2x^3-2y^3$ (esta es la respuesta)

Para realizar una resta, el procedimiento es similar, hay que tener mucho cuidado con los signos. Restar P1 -P2

P1 - P2: $6x^2y+3xy^2-(4x^3-3x^2y+2xy^2-5y^3)$ P2 está entre paréntesis.

P1 - P2: $6x^2y+3xy^2-4x^3+3x^2y-2xy^2+5y^3$. Se cambiaron los signos de P2.

Buscar los términos semejantes y realiza las operaciones indicadas:

P1 - P2: $9x^2y+xy^2-4x^3+5y^3$ (esta es la respuesta)

5.2 Multiplicación de Polinomios

Es la operación donde dos expresiones denominadas “multiplicando” y “multiplicador” dan como resultado un “producto”. Al multiplicando y al multiplicador se denomina “factores”.

Se debe tomar en cuenta la ley de los signos:

1- (+) (+) =+
2- (+) (-) = -
3- (-) (+) = -
4- (-) (-) = +

<u>Ejemplo</u> Evaluar el siguiente ejemplo, multiplicar P1xP2:

P1: $4x^3y+8xy^4$

P2: $3x^2-4x^5y+6xy^6-3y^2$

Entonces:

P1xP2: $(4x^3y+8xy^4)(3x^2-4x^5y+6xy^6-3y^2)$

P1xP2: $(4x^3y^1+8x^1y^4)(3x^2-4x^5y^1+6x^1y^6-3y^3)$

Se multiplica el primer término del primer polinomio por cada uno de los términos del segundo polinomio:

P1xP2: $(4x^3y^1+8x^1y^4)(3x^2-4x^5y^1+6x^1y^6-3y^2)$

$(4x^3y^1)(3x^2) = 12x^5y^1$

$(4x^3y^1)(-4x^5y^1) = -16x^8y^2$

$(4x^3y^1)(+6x^1y^6) = 30x^4y^7$

$(4x^3y^1)(-3y^2) = -12x^3y^3$

Realizar las mismas operaciones con el segundo término del primer polinomio:

P1xP2: $(4x^3y^1+8x^1y^4)(3x^2-4x^5y^1+6x^1y^6-3y^2)$

$(8x^1y^4)(3x^2) = 24x^3y^4$

$(8x^1y^4)(-4x^5y^1) = -32x^6y^5$

$(8x^1y^4)(+6x^1y^6) = 48x^2y^{10}$
$(8x^1y^4)(-3y^2) = -24xy^6$

Ordenando la respuesta:
P1xP2: $12x^5y^1 - 16x^8y^2 + 30x^4y^7 - 12x^3y^3 + 24x^3y^4 - 32x^6y^5 + 48x^2y^{10} - 24xy^6$

Se debe verificar si hay términos semejantes y simplificar, para sumar o restar:
En el ejercicio no hay términos semejantes, por lo tanto, la respuesta final será la misma.

Se debe recordar que la parte numérica de una expresión algebraica se multiplica y en la parte literal se suman los exponentes de las letras que se repiten.

5.3 División de Polinomios

Es la operación en donde dos expresiones denominadas "Dividendo" y "Divisor" se dividen dando como resultado una expresión "Cociente".
En la división se regula con la aplicación de la ley de los signos. Además, se debe tomar en cuenta, la ley de los exponentes: en la división de bases iguales se resta el exponente del dividendo menos del divisor; si el exponente es cero es igual a uno.

Para dividir los polinomios el grado del polinomio del dividendo debe ser mayor o igual al grado del polinomio del divisor

Ejemplo Dividir $(8x^5 - 6x^4 - 4x^3 - 5x + 10) : (x^3 - 2)$

$$\begin{array}{l|l}
8x^5 - 6x^4 - 4x^3 + 10 & x^3 - 2 \\ \cline{2-2}
\underline{-8x^5 + 16x^2} & 8x^2 - 6x - 4 \\
/ \ -6x^4 - 4x^3 + 16x^2 + 10 & \\
\quad \underline{-6x^4 - 12x} & \\
\quad / \ -4x^3 + 16x^2 - 12x & \\
\qquad \underline{4x^3 + 8} & \\
\qquad / \ -16x^2 - 12x + 8 &
\end{array}$$

La respuesta será: Cociente + Residuo/Divisor

En el ejercicio: $8x^2 - 6x - 4 + \dfrac{-16x^2 - 12x + 8}{x^3 - 2}$

Dividir:

- $(3x^5 + 4x^4 - 22x^3 + 10x^2 + 14x - 5) : (3x^2 - 4x + 3)$
- $(8x^3 - 3x^2 + 2x - 4) : (4x^2 - 3x + 1)$
- $(4x^3 - 2x^2 - 2x - 2) : (x^2 + x + 1)$
- $(4x^3 - 3x^2 + x) : (2x - 1)$

UNIDAD 6. Productos Notables y Factorización

Se denomina como producto notable, a un producto que se puede obtener sin realizar las multiplicaciones.

Los principales son:

6.1. Cuadrado de un binomio

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo término, mas cuadrado del segundo término.

Por ejemplo: $(4x +3)^2$ $= (4x)^2 + 2(4x)(3) + (3)^2$

El cuadrado del primer término es: $(4x^1)^2 = 16x^2$
El doble producto de ambos términos es: $2(4x)(3) = 24x$
El cuadrado del segundo término es: $(3)^2 = 9$
Respuesta final será: $(4x +3)^2 = 16x^2 + 24x +9$

6.2. Cuadrado de la diferencia de dos términos:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

El cuadrado de la diferencia de dos términos, es igual al cuadrado del primer término, meno el doble producto del primero por el segundo término, más cuadrado del segundo término.

Por ejemplo: $(3x -5)^2$ $= (3x)^2 - 2(3x)(5) + (5)^2$
El cuadrado del primer término es: $(3x^1)^2 = 9x^2$
El doble producto de ambos términos es: $-2(3x)(5) = -30x$
El cuadrado del segundo término es: $(5)^2 = 25$
La respuesta final será: $(3x -5)^2 = 9x^2 - 30x +25$

6.3. Cubo de la suma o diferencia de dos términos.

Cuando se presente binomios elevados al cubo se resuelve de siguiente manera

Diferencia de Cubos: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
Suma de Cubos: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b)$

Ejemplo: $27 - x^6 = (3 - x^2)(9 + 3x^2 + x^4)$

Ejemplo: $8b^3 + 1 = (2b + 1)(4b^2 - 2b + 1)$

1.	$125 - y^3$	1.	$8x^3y^3 + 8$
2.	$216a^3 + 6b^6$	3.	$y^6 - a^6$
4.	$\frac{1}{27}y^3 + \frac{1}{8} =$	5.	$y^3 - \frac{1}{343} =$

6.3. Factorización

Factorizar una expresión algebraica es expresar como resultado final como un producto.

Se realiza las multiplicaciones:

1. $5x(3x^2 - 2x + 4) = 15x^3 - 10x^2 + 20x$

2. $(x + 4)(x + 3) = x^2 + 12x + 12$

Analizando las expresiones algebraicas (1) y (2) los términos de la izquierda, son los factores y las de la derecha son las expresiones a factorizar, es decir, la factorización es el proceso inverso de la multiplicación.

La factorización es de extrema importancia en la Matemática, por lo cual se debe entender y como aplicar, para problemas de cálculo y sus aplicaciones.
Existen varios casos de factorización:

Factor Común Monomio:

Factor común monomio, es el monomio que está comprendida en todos los términos del polinomio. El M.C.D. es por lo tanto los coeficiente y letras con el menor exponente.

Ejemplo N° 1: ¿ cuál es el factor común monomio en $8xy + 14y - 12xyz$?

Entre los coeficientes es el 2, o sea, $4.2xy + 7.2y - 6.2xyz$.

En las letras, la que se pite en todos los términos es y
$8xy + 14y – 12xyz= 2y(4x+7-6xz)$

Ejemplo N° 2 : Cuál es el factor común monomio en : $10a^2 - 25ab - 30 ac$

El factor común entre los coeficientes es 5 y entre los factores literales es a, por lo tanto

$10a^2 - 25ab - 30 ac = 5a (2a-5b-6c)$

Ejemplo N° 3 : Cuál es el factor común en $3x^2y^2- 15xy^3 + 9x^2y^4$

El factor común es "$3xy^2$ "porque

$3x^2y^2- 15xy^3 + 9x^2y^4 =3xy^2 (x - 5y^2 + 3xy^3)$

Ejecutar los siguientes ejercicios:

EJERCICIOS. Hallar el factor común de los siguientes ejercicios:

1. $9x - 15 =$	2. $6x - 10y =$
3. $48a - 24ab =$	4. $20x - 45x^3 =$
5. $12m^3n^2 + 7mn^5 =$	6. $2m^2 -30 am =$
7. $8a^3 - 6a^2 =$	8. $3ax + 4bx + 2cx =$
9. $4b^5-2b^3 =$	10. $8a^2bx - 12bx^5 =$
11. $12a - 2b + 36 =$	12. $3abd + 6ac - 9ad =$
13. $22x - 14xy + 42xz =$	14. $3x^4 - 100x + 20x^5 =$
15. $4x^2y - 12xy^2 + 24xy =$	16. $6m^3n^2 + 24m^2n - 18m^4n^3 =$
17. $3x^2 + 7x + 6x^3 - 14x^4 =$	18. $14p^2q^3 + 16p^3q^2 - 18p^4q^3 - 120p^5q^4 =$
19. $2 m^3n^2p^4 + 3m^4n^3p^5 - 4m^6n^4p^4 + 9m^2n^4p^3 =$	
20. $\frac{1}{4}x^3y-\frac{1}{3}xy^2 =$	
21. $\frac{1}{3}a^2b^3+\frac{2}{5}a^3b^4-\frac{1}{8}a^2b^5+\frac{3}{2}a^4b^2 =$	
22. $\frac{3}{2}a^2b-\frac{7}{4}a^3b^2+\frac{7}{12}a^2b^3-\frac{18}{24}a^3b =$	

Factor Común Polinomio:

El objetivo es convertir el polinomio en una multiplicación de un monomio (factor común) por otro polinomio.

Ejemplo N° 1.

Factorizar $x^3 (c + d) + y^2 (c + d) =$

El factor común que es (c + d) $= (c + d) (x^3 + y^{2)}$

Ejemplo N° 2.

Factorizar $3a (m^2 - 2n) - 5b (m^2 - 2n) =$

$= (m^2 - 2n) (3a-5b)$

EJERCICIOS

1.	$2a(x + 1) + 3b (x + 1) =$	2.	$2m(4a + b) +8 p (4a + b) =$
3.	$x^2(p + q) + y^2(p + q) =$	4.	$(a^3 + 1) -2 b (a^3 + 1) =$
5.	$2a (1 - x) + 4c(1 - x) =$	6.	$ab(2 + x) - d(2 + x) =$
7.	$(x + y)(n + 1) - 3 (n + 1) =$	8.	$(2a^2 + 1)(a - 1) - 2 x(2a^2 - 1) =$
9.	$2a(a + b) - 3b (a - b) =$	10.	$(4x + 3)(5 - r) - (2x - 5)(5 - r) =$

Factor común por Agrupación de Términos

Se lama factor común por agrupación de términos, cuando los términos del polinomio se pueden reunir en grupos de igual términos, con un factor diferente en cada grupo.

Cuando se reúnen en grupos de igual número de términos, se obtiene el factor común de cada grupo, y se agrupa en paréntesis el común, quedando los términos restantes en una multiplicación de polinomios.

Ejemplo N°1.

Factorizar $3ax +3bx - 2ay + 6a - 2by + 6b$

Se agrupa términos que tengan factor común:

$(3ax – 2ay+6a) + (3bx-by+5b)$

Se saca factor común de cada grupo

(a + b) (p + q)

EJERCICIOS:

11.	$a^2 + ab + ax + bx =$	12.	$ab + 3a + 2b + 6 =$
13.	$ab - 2a - 5b + 10 =$	14.	$2ab + 2a - b - 1 =$
15.	$am - bm + an - bn =$	16.	$3x^3 - 9ax^2 - x + 3a =$
17.	$3x^2 - 3bx + xy - by =$	18.	$6ab + 4a - 15b - 10 =$
19.	$3a - b^2 + 2b^2x - 6ax =$	20.	$a^3 + a^2 + a + 1 =$
21.	$ac - a - bc + b + c^2 - c =$		
22.	$6ac - 4ad - 9bc + 6bd + 15c^2 - 10cd =$		
23.	$ax - ay - bx + by - cx + cy =$		
24.	$3am - 8bp - 2bm + 12\ ap =$		
25.	$18x - 12 - 3xy + 2y + 15xz - 10z =$		
26.	$\frac{20}{3}x^2 - \frac{31}{5}xz - \frac{9}{2}xy + \frac{30}{5}yz + 3x - 8z =$		
27.	$1am - \frac{4}{3}am - \frac{3}{5}bm + \frac{24}{5}bn =$		

Trinomio de la forma x^2 + bx + c

El trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ se resuelve, primeramente, descomponiendo el trinomio en dos factores binomiales, determinando el término que multiplicado obtenga "c" y sumando el término "b"

Ejemplo N° 1. Factorizar $a^2 - 13a + 40$

1° Hallar dos factores que multiplicados de 40
2° Hallar dos términos que sumados entre si den -13
La respuesta final será: $(a-8)(a-5)$

Ejemplo Nº 2: Factorizar $x^2 + 28x - 29$

1º Hallar dos factores que multiplicados de -29
2º ° Hallar dos términos que sumados entre si den +28
La respuesta final será: $(x+29)(x-1)$

EJERCICIOS:

Factorizar los siguientes trinomios en dos binomios:

1.	$x^2 + 28x - 29$	2.	$n^2 - 7n - 60$
3.	$y^2 + 8y + 15$	4.	$x^2 - 5x - 36$
5.	$t^2 - 12t + 27$	6.	$x^2 - 14x + 33$
7.	$a^2 - 27a + 50$	8.	$x^2 - 3x - 4$
9.	$a^2 + 14ab + 24b^2$	10.	$x^2 + 8x - 1008$
11.	$a^2 - 2a - 35$	12.	$y^2 + 15/4y + 7/8$

Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Existen varios métodos, el más fácil y practico es:
Se multiplica el coeficiente numérico del primer término "a" por el termino independiente "c" y se factoriza como si fuera un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, al resultado se divide para la cantidad que se multiplicó "a" par que no altere la expresión.

Ejemplo

Factorizar: $3x^2 - 9x + 6$

1º Se multiplica: 3*6 = 18

2º Se descompone en dos factores, y se factoriza como trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

$$(3x-6)(3x-3)$$

3º Se divide para el coeficiente numérico que se multiplico (3)

$$\frac{(3x-6)(3x-3)}{3}$$

4º La respuesta final será

$$(x-2)(3x-3) \text{ o}$$
$$(3x-6)(x-1)$$

EJERCICIOS:

1	$2y^2 + 3y - 2$	2	$3a^2 + 10ab + 7b^2$
3	$2a^2 + 3a - 2 =$	4	$6h^2 + 7h + 2$
4	$6 - 13x + 5x^2$	6	$7a^2 - 15a + 2$
7	$12c^2 - 7p - 12$	5	$2y^2 + 5y - 12$
6	$20x^2 - 7x - 20$	7	$15m^2 + m - 6$
8	$3a^2 - 7a - 20$	9	$8x^2 - 14x + 3$
10	$5x^2 + 3xy - 2y^2 =$	11	$9p^2 + 37p + 4 =$
12	$6a^2 - 5a - 15$	13	$2n^2 - 17nm + 15m^2$
14	$20x^2 + 44x + 15$		

Diferencia de Cuadrados perfectos

La diferencia de cuadrados perfectos es el resultado del producto de la suma y resta de la raíz cuadrada de sus términos.

Ejemplo:

Factorizar $4y^2 – 9x^2$

Al primer témino $4x^2$ se obtiene su raíz cuadrada, 2y

El segundo término, también se saca la raíz cuadrada, 3x

El resultado de la factorización (2y+3x) (2y-3x)

EJERCICIOS:

1	$4x^2 – 25y^2$	1	$25x^2 - 100$
2	$49m^2- 4x^2$	3	$9x^2 - 100q^2$
4	$49x^2y^2 - 36$	5	$49a^2 – 64b^2$
6	$324r^2 - 169 b^2$	7	$121 a^2 - 144 l^2 =$

Trinomio Cuadrado Perfecto

Para factorizar un trinomio perfecto, primeramente, hay que comprobar que es este caso de factorización, para lo cual se extrae las raíces cuadradas de los extremos del trinomio, y el segundo término será igual al doble producto de las raíces cuadradas. El resultado final será a la suma /resta de sus raíces elevadas al cuadrado, el signo de la expresión dependerá del signo del segundo término.

Ejemplo:

Factorizar $4x^2 - 12x + 9$

1° Hallar la raíz cuadrada del primer término $4x^2$: es 2x

2° Hallar la raíz cuadrada del tercer término es 3 se coloca el signa del segundo término.

El resultado de la factorización es:

$$4x^2 - 12x + 9= (2x-3)^2$$

EJERCICIOS:

1. $x^2 - 10b + 25$	2. $9r^2 + 12ry + 4y^2$
3. $25y^2 – 50y + 1$	4. $y^2 + 12y + 36$
4. $25m^2 - 80mn + 4n^2$	5. $49a^2 – 14a + 1$
6. $36y^2 – 84ya + 49a^2$	7. $9a^2 + 18a + 1$
8. $1 + 8a + 16a^2$	9. $25x^2 - 70 xy + 49y^2$
10. $9m^2n^2 + 12mnd + 4d^2$	11. $289r^2 + 68rxy + 4x^2y^2$
12. $121x^4y^6 - 22 x^2y^3z^6 + z^{12} =$	

EJERCICIOS DIVERSOS:

1. $x^2+50x+336$	2. $x^2 – 66a + 1080$
3. $y^2 – 3y - 28$	4. $a^2 + 7a - 60$
5. $4x + 8xy$	6. $bx - ab + x^2 - ax$
7. $20abc-30abd-60ab^2c+90ab^2d^2$	8. $mx + ny + x + y$
9. $6x^2 - 216$	10. $21y^2+11y-2$
11. $y^4 – x^8$	12. $a^2 + 2a + 1 - y^2$
13. $(x +yb)^2 - (ac + d)^2$	14. $20r^2 + 44r -15$
15. $15m^2 +16m -15$	16. $a^{16} - b^{16}$

UNIDAD 7. ECUACIONES

La ecuación matemática es una igualdad ente dos expresiones conocidas como miembros, les separa un signo de igualdad, donde relaciona datos conocidos y desconocidos llamadas variables o incógnitas, relacionadas por medio de operaciones matemáticas.

$$3x+6=x-8$$

Las incógnitas o variables son letras que aparecen en la ecuación.

Al resolver las ecuaciones, se obtendrá valores que deben tomar las letras para que la igualdad sea verídica.

$3x+6=x-8$

3x –x=-8 -6

2x = -14 x= -7

Remplazado el valor de la incógnita en la ecuación original, debe existir una igualdad.

3(-7) + 6 = -7-8

-21 + 6 = -15 -15 = -15

El grado de una ecuación determina el mayor de los grados de los monomios que forman sus miembros.

7.1 Ecuaciones de primer grado

La ecuación de primer grado o lineal, es una igualdad donde se involucran dos o más variables en sumas o restas de una variable a la primera potencia.

Tienen el formato $ax+b=0$, donde la variable *x* está elevada al exponente 1; *a* debe ser un número distinto de cero.

Para resolverla se despejar la *x*. Así: $ax+b=0 \Leftrightarrow ax=-b \Leftrightarrow x=-\dfrac{b}{a}$

Si aparecen denominadores y paréntesis, primero se resuelven los paréntesis, a continuación, se quitan denominadores.

Ejemplos

Resolver las ecuaciones:

- $12x - 3 = 0 \Leftrightarrow 12x = 3 \Leftrightarrow x = 3/12 = 1/4$

- $3x - \frac{2}{3} + 5x - 2 = \frac{2x+3}{4}$

1. Se elimina los denominadores obteniendo el m.c.m. y se transforma en expresiones enteras:

   m.c.m.= 12 $\quad 36x - 8 + 60x - 24 = 6x + 9$

2. Agrupar términos: 36x+60x-6x = 9+8+24

   90x = 41

3. Despejar *x*: $\quad x = \frac{41}{90} = 0.45$

Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

Para resolver ecuaciones de primer grado primer grado se debe seguir el siguiente procedimiento:

1.Eliminar paréntesis.
2.Quitar denominadores.
3.Agrupar los términos que tengan la variable en un lado de la igualdad y los independientes en el otro lado.
4.Reducir los términos semejantes.
5. Despejar la incógnita.

Resolver la ecuación $\quad \frac{3x-2}{4} = 2x - 5$

Se obtiene el m.c.m. o el 4 que se encuentra en el denominador pasa a multiplicar a los términos de la otra parte de la igualdad.

$$3x - 2 = 4(2x - 5)$$
$$3x - 2 = 8x - 20$$
$$3x - 8x = -20 + 2$$
$$-5x = -18$$
$$x = \frac{-18}{-5} = 3.6$$

Resolver: $\quad \frac{3(y-4)}{8} = 2 + \frac{2y-3}{7}$

Se obtiene el m.c.m. 56

$$21(y-4)=112+8(2y-3)$$
$$21y-84=112+16y-24$$
$$21y-16y=84+112-24$$
$$5y=172$$
$$y=\frac{172}{5}=34{,}4$$

Resolución de ecuaciones con signos de agrupación

Al resolver las ecuaciones de primer grado con signos de agrupación, se debe suprimir los signos considerando la ley de signos de agrupación, cuando existen varios se proceder de adentro hacia afuera.

Resolver: $2-\left[3+(x+1)\right]=3x+2\left[x-(3+2x)\right]$

$2-\left[3+(x+1)\right]=3x+2\left[x-(3+2x)\right]$ Se elimina los paréntesis.

$2-\left[3+x+1\right]=3x+2\left[x-3-2x\right]$ Reducir términos semejantes y eliminar Corchetes.

2-3-x-1= 3x+2x-6-4x Trasladar los términos, emplear el criterio de operaciones inversas.

-x -3x-2x+4x = -2+3+1-6 Transponer los términos, empleando el criterio de operaciones inversas.

-2x = -5 Reducir términos semejantes

$x = \frac{-5}{-2} = 2.5$ Despejar x pasando a dividir a -2, luego simplificar

Nota

Al eliminar los signos de agrupación en una ecuación, se debe tomar en cuenta:

1) Cuando existe un signo (+) antes del signo de agrupación, no afecta en nada todo lo que está dentro de este signo. Por ejemplo: +(8-4x) = 8-4x

2) Cuando se tiene un signo negativo (-) este signo afectará a todos los términos que se encuentren en su interior, cambiando de signo cada uno de ellos. Por ejemplo: -(9-2x) = -9+2

Resolución de ecuaciones con productos indicados

Cuando en la ecuación existen productos indicados, se debe resolver los productos existentes en la expresión y luego se sigue el procedimiento general (aplicando el criterio de las operaciones inversas).

Ejemplo, resolver: 12 (x-4) -8 (5-4x) = 3 (2x+1) +4 (3x-2)

Primeramente, se resuelve las operaciones indicadas, y adicionalmente se limita los paréntesis.

12x-48-40+32x = 6x +3+12x-8 Llevar los términos semejantes a un lado de la igualdad, y los términos independientes al otro lado (empleamos operaciones inversas.)

12x+32x-6x-12x= 48+40 +3-8 Reducir términos semejantes en ambos lados de la igualdad.

26x = 83

$x = \frac{83}{26}$ x= 3,1923

Para resolver los productos indicados se ha empleado los criterios de multiplicación de un monomio por un polinomio

7.1.2 Inecuaciones de Primer Grado

Una inecuación es una expresión algebraica que tiene dos miembros separados por una desigualdad. La desigualdad puede ser:

$<$, $\leq$, $>$, $\geq$

Al resolver una inecuación de primer grado se encuentre el valor o valores que la verifican, a diferencia de las ecuaciones, las inecuaciones tienen diversas soluciones agrupadas en un conjunto.

Resolución de inecuaciones de primer grado con una incógnita

El método de resolución de inecuaciones de primer grado es similar a las empleadas en las ecuaciones de primer grado, salvo que, si se multiplica los dos miembros de una inecuación por un número negativo, cambia el sentido de la inecuación.

Se analizará algunos ejemplos para tener los conceptos más claros.

Ejemplo: Resolver la inecuación 8x - 4 > 28

Distribuir adecuadamente, las letras a un lado y los números al otro lado de la desigualdad (en este caso >), entonces para llevar el -4 al otro lado de la desigualdad, se aplica el operador inverso (el inverso de -4 es +4, porque la operación inversa de la resta es la suma).

Se obtiene: 8x > 28+4

8x > 32

El número 8 que está multiplicando a la variable o incógnita x, se traslada al otro lado de la desigualdad dividiendo (la operación inversa de la multiplicación es la división).

Resolviendo: x > 32 ÷ 8

x > 4

Por lo tanto, el valor de la incógnita o variable "x" serán todos los números mayores que 4

Ejemplo: $2-\left[-3(x+2)-\frac{x-3}{2}\right]\leq\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+4x$

Primeramente, se elimina los corchetes y paréntesis

$$2-\left(-3x-6-\frac{x-3}{2}\right)\leq\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+4x$$

$$2+3x+6+\frac{x-3}{2}\leq\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+4x$$

Se elimina denominadores

$$24+36x+72+x-3\leq 8x-5x+3+4x$$
$$36x+x-8x+5x-4x\leq +3-24-72+3$$
$$30x\leq -90$$
$$x\leq\frac{-90}{30}$$
$$x\leq -3$$

- **Casos Especiales**

En los casos en los que quede signo negativo en el lado de la incógnita, se tiene que realizar un pequeño arreglo en el problema o ejercicio, mismo que se verá de una manera práctica.

2x - [x -(x -50)] < x - (800 -3x)	
2x - [x -x +50] < x -800 +3x	Primero se elimina los paréntesis.
2x - [50] < 4x -800	Reducir los términos semejantes.
2x -50 < 4x -800	Eliminar los corchetes.
2x -4x < -800 +50	Transponer los términos, empleando el criterio de operaciones inversas.

$-2x < -750$ Reducir términos semejantes

$2x > 750$ No puede quedar signo negativo en la parte de la incógnita, entonces se debe cambiar de signo a todos, y además cambiar el sentido de la desigualdad.

$x = \frac{750}{2} = 375$

Despejar x pasando a dividir al 2, luego se simplifica

- **Resolución de Problemas**

Cuando se resuelven problemas con la aplicación de inecuaciones; primeramente, identificar la incógnita, y en forma matemática realizar las operaciones correspondientes para conseguir el valor de la variable deseada.

Ejemplo

Una furgoneta pesa 900 Kg. La diferencia entre la furgoneta vacía y el peso de la carga que lleva no debe ser inferior a 480Kg. Si se desea cargar 5 cajones iguales ¿Cuándo debe pesar como máximo cada cajón, para poder llevarlo en la furgoneta?
Dentro de cinco años, Ximena tendrá no menos de 18 años. ¿Qué edad tiene actualmente Ximena?
Se tiene:

Peso de furgoneta 900Kg.
x La furgoneta

$900-x \geq 480$
Como carga 5 cajones de igual peso, y si "y" es el peso
$X= 5y$

Reemplazando

$900- 5y \geq 480$
$-5y \geq 480- 900$
$-5y \geq -420y$
$Y \leq \frac{-420}{-5}$

Y = 84 Kg. Es el peso de cada cajón.

7.1.3 Sistemas de Ecuaciones de primer grado

Sistema de ecuaciones de primer grado con varias incógnitas, es el conjunto de ecuaciones que se pueden comprobar, cumplir, para los mismos valores de las variables.
Un sistema puede estar constituido por un sinnúmero de ecuaciones de cualquier grado. Las más sencillas, son las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, para su resolución existen varios métodos como:

Sustitución,

Reducción.

Igualación.

Grafico.

Determinantes

Resolución de ecuaciones de Primer Grado con Dos Variables

Para resolver un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, es determinar el punto en donde las dos ecuaciones se interceptan, se debe utilizar el método de resolución más aceptable y confiable.

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 5x + y = 12 \\ 4x - 2y = 15 \end{bmatrix}$$

Aplicando el método de **Reducción,** donde se reduce los términos semejantes a una incógnita.

Analizando, se determina que en la segunda ecuación se tiene -2y y en la primera "y", para resolver se multiplica la primera por 2

$$10x + 2y = 24$$
$$4x - 2y = 15$$

Sumando los diferentes términos:
14x = 39

Despejando. La incógnita

$X = \frac{39}{14}$

X= 2,785

El valor de la variable se reemplaza en cualquiera de las ecuaciones originales, para obtener el valor de la otra variable. Se siguiere que sea la más sencilla, en este caso en la ecuación dos.

4(2,785) -2y = 15
11,14 -2y = 15
-2y = 15- 11,14
-2y = 3,86

$y = \frac{3,86}{-2}$

Y= - 1,93

Si utilizamos el mismo ejemplo, y se aplica el método **Sustitución,** se despeja una incógnita de cualquiera de las ecuaciones originales y se reemplaza en la otra ecuación.

$$\begin{bmatrix} 5x + y = 12 \\ 4x - 2y = 15 \end{bmatrix}$$

De la primera ecuación, despejar la incógnita “y”, se obtiene:

Y = 12 – 5x

Reemplazar el valor obtenido para "y" en la segunda ecuación

4x -2(12- 5x) = 15
4x – 24 +10x =15
24x = 15 + 24
14x = 39

$X = \frac{39}{14}$

X = 2,785

Se reemplaza en cualquier ecuación original,

4(2,785) -2y = 15
11,14 -2y = 15
-2y = 15- 11,14

-2y = 3,86

$y = \frac{3,86}{-2}$

Y= - 1,93

Aplicando el método de **Igualación**, donde se despeja la misma variable en las dos ecuaciones y se iguala, obteniendo el valor de una de las variables.

Aplicando al mismo ejemplo original:

$$\begin{bmatrix} 5x + y = 12 \\ 4x - 2y = 15 \end{bmatrix}$$

Se debe trabajar por separado la primera ecuación y la segunda ecuación. En ambas se busca el valor de "y"

5x + y= 12

y= 12-5x

De la segunda ecuación:

4x- 2y = 15

-2y = 15-4x

$Y = \frac{15- 4x}{-2}$

Igualar ambas ecuaciones.

$12 – 5x = \frac{15- 4x}{-2}$

El término “-2” que se encuentra en el divisor pasa a multiplicar con el otro término de la igualdad.

-2 (12 – 5x) = 15 – 4x

-24+10x = 15 -4x

10x+4x = 15 +24

14x = 39

$X = \frac{39}{14}$

X = 2,785

Reemplazar el valor de la incógnita “x” en cualquiera de las ecuaciones originales, se obtendrá el valor de la otra variable.

4(2,785) -2y = 15

11,14 -2y = 15

-2y = 15- 11,14

-2y = 3,86

y= 3,86

-2

Y= - 1,93

7.2 Ecuaciones de segundo grado

La ecuación polinÒmica de segundo grado o ecuación cuadrática, es aquella que una vez reducida queda de la forma: $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ donde debe ser diferente de cero.

Cuando todos los coeficientes de la ecuación son diferentes a cero, es una ecuación completa.

Cuando uno de los términos es igual a cero se dice que es una ecuación incompleta:

$\mathbf{ax^2= 0}$

$\mathbf{ax^2 + bx=0}$

$\mathbf{ax^2 + c =0}$

.

Resolución de Ecuaciones Cuadráticas Incompletas:

Ejemplo 1:

Resolver $8x^2 = 0$

$$x^2 = \frac{0}{16}$$

$$X= 0$$

Toda ecuación incompleta $\mathbf{ax^2= 0}$**, tienen** un solo valor x= 0

Ejemplo 2

Resolver: $5x^2 - 20 = 0$

En el ejemplo falta el término que contiene la variable “x”, de primer grado que en este caso bx = 0, se seguirá el siguiente procedimiento:

$5x^2 - 20 = 0$

$5x^2 = 20$ Trasladar el termino -20 al otro lado de la igualdad con signo inverso.

$x^2 = \frac{20}{5} = 4$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$ Obtenerla raíz cuadrada en ambos términos (para eliminar el exponente de "x")

$x = \pm 2$ Por ser cuadrática, se obtendrá dos soluciones, una la raíz positiva y otra la raíz negativa.

Ejemplo 3:

Resolver: $4x^2 + 6x = 0$

En este ejemplo falta el termino independiente "c" que es igual a cero.
Se procederá de la siguiente manera:
$4x^2 + 6x = 0$
$x (4x + 6) = 0$

Se saca factor común, en este caso es x
Igualar a 0 (cero) cada uno de los factores; tanto el primero, como el segundo.
$x = 0$ Se obtendrá la primera respuesta.
El otro término, se resuelve como una ecuación de primer grado.

$4x + 6 = 0$

$$x = \frac{-6}{4}$$

$$. \; x = \frac{-3}{2}$$

- **Resolución de Ecuaciones Cuadráticas por Factorización**

Para resolver ecuaciones de segundo grado o cuadráticas por factorización o descomposición de factores, es necesario que sea el trinomio de la forma: $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, que sea factorizable. Se debe seguir el siguiente procedimiento:

1- Simplificar la ecuación dada y transformarla a ax^2 **+ bx + c = 0**
2- Factorizar el trinomio, para obtener el producto de binomios.
3- Igualar cada término a cero y resolver las ecuaciones simples para obtener los valores de la variable.

<u>Ejemplo</u>: $3x^2 - 9x + 6=0$

Se realiza en procedimiento de factorización:
1º Se multiplica: 3*6 = 18
2º Se descompone en dos factores, y se factoriza como trinomio de la forma $x^2 +bx +c$

$$(3x-6)(3x-3)=0$$

3º Se divide para el coeficiente numérico que se multiplico (3)

$$\frac{(3x-6)(3x-3)}{3}$$

4º La respuesta final será

$$(x-2)(3x-3) \text{ o}$$

$$(3x-6)(x-1) = 0$$

Se iguala cada factor a cero

3x- 6 = 0 3x= 6

X= $\frac{6}{3}$ x=2

X – 1 = 0 x= 1

Ejemplo Resolver x(x-1) -5(x-2) = 2

Primero simplificar la ecuación y ordenar:

X^2-x-5x+10 = 2

X^2-6x+ 8 = 0

Factorizar

(x- 4) (x- 2) = 0

X – 4=0 x= 4

X – 2 = 0 x= 2

- **Resolución de ecuaciones cuadráticas completando el trinomio cuadrado perfecto.**

Cuando no se puede factorizar la ecuación, se completa el trinomio cuadrado perfecto, con el objetivo de factorizar el trinomio resultante. Para resolver una ecuación cuadrática con este método se debe completar un binomio al cuadrado y luego despejar utilizando los conceptos matemáticos.

Por ejemplo:

$x^2 + 4x + 1 = 0$

$x^2 + 4x + 1 +3= 0 +3$ Sumar 3 en ambos lados de la igualdad.

$x^2 + 4x + 4 = 3$ Se obtiene que a la izquierda: $(x +2)^2 = x^2 + 4x + 4$

$(x +2)^2 = 3$ Además en el término de la derecha $1{,}732^2 = 3$

$(x +3)^2 -1{,}732^2 = 0$

Llevar todos los términos a un solo lado de la igualdad, mientras que al otro lado dejar simplemente 0 (cero).

[(x +3) -1,732] [(x +3) +1,732] = 0

(x +3 -1,732) (x +3 +1,732) = 0

(x +2,732) (x +4,732) = 0 Factorizar.

Observar que en el primer factor se respetan todos los signos, mientras que en segundo factor se cambia el signo solo al término independiente (número).

$(x + 2{,}732) = 0 \qquad (x + 4{,}732) = 0$

$x + 2{,}732 = 0 \qquad x + 4{,}732 = 0$

$x = -2{,}732 \qquad x = -4{,}732$

Igualar cada uno de los factores a 0 (cero) y resolver las ecuaciones para hallar las raíces o resultados.

- **Fórmula General para la Resolución de Ecuaciones Cuadráticas**

La ecuación cuadrática, es una ecuación polinomial, donde el mayor exponente es igual a dos. Tiene la forma: $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$
donde "a", es el coeficiente cuadrático o de segundo grado y debe ser diferente a cero "b", el coeficiente lineal o de primer grados y "c", término independiente; y x es la incógnita o variable.

Entonces para hallar directamente las raíces se puede aplicar la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

<u>Ejemplo</u>: Resolver $4x^2 - 3x - 6 = 0$

Analizando la ecuación original determinar los valores de a, b y c, son los coeficientes numéricos.

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$ $\qquad a=4 \quad b=-3 \quad c=-6$

$x = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{[(-3)^2 - 4(4)(-6)}}{2(4)}$ $\qquad$ Reemplazar los valores en la fórmula general.

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{(9 + 96)}}{8}$ $\qquad$ Resolver las potencias y productos.

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{105}}{8}$ $\qquad$ Resolver la operación dentro del radical (en este caso una suma).

$x = \dfrac{2 \pm 10{,}246}{8}$

Resolver el radical y hallar las dos respuestas.

$x = \dfrac{2 + 10{,}246}{8} \qquad x = \dfrac{2 - 10{,}246}{8}$

Una de las respuestas será positiva y la otra negativa.

$$x = \frac{12{,}246}{8} = 1{,}530$$

$$x = \frac{-8{,}246}{8} = 1{,}030$$

UNIDAD 8. Algebra

El álgebra es una rama de las matemáticas, donde se emplea signos, letras y números, para hacer referencias a sinnúmero de operaciones aritméticas.
En las ecuaciones de cualquier grado siempre tendrán alguna solución, así:

Una ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$.
Su solución viene dada por la fórmula: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

<u>Ejemplos</u>:

-La ecuación $2x^2+4x-6=0$ tiene dos soluciones: $x_1 = -3$ y $x_2 = 1$.

$$2x^2+4x-6=2(x+3)(x-1)$$
$$x+3=0$$
, $x=3$.
$$x-1=0$$
$$x=1$$

-La ecuación $x^2+4x+4=0$ sólo tiene una solución doble, x = –2. Luego,

$$x^2+4x+4=0$$
$$(x+2)^2=0$$
$$x+2=0$$
$$x=-2$$

.
-La ecuación $-x^2+4x-6=0$ no tiene soluciones reales.

No es necesario algunas veces aplicar la formula general, sino aplicar la factorización cuando sea posible.

$$x^2+4x=0$$
$$x(x+4)=0$$
$$x=0$$
$$x+4=0$$
$$x=-4$$

8.1 Ecuaciones de tercer grado

Una ecuación de tercer grado o ecuación cubica con una incógnita, son aquellas de grado tres, de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, *a, b, c, d* son números reales; $a \neq 0$.

Para resolver ecuaciones de tercero o grado superior no hay fórmulas elementales; sólo se puede aplicar una propiedad que da resultado cuando hay alguna solución entera, pues si existe, será un número divisor del término independiente, *d*. Las demás soluciones pueden hallarse descomponiendo en factores la ecuación inicial.

Si una ecuación, cualquiera que sea su grado, viene dada como producto de factores = 0, las soluciones son las de cada uno de los factores, igualados a cero.

<u>Ejemplos</u>:

- Resolver $(x-14)(8x^2-1)(x^3+27)=0$ son las de

$$: \begin{cases} x-14=0 & \Rightarrow \quad x=14 \\ 8x^2-1=0 & \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{8}} \\ x^3+27=0 & \Rightarrow \quad x=\sqrt[3]{-27}=-3 \end{cases}$$

- En la ecuación $x^3-2x^2+2x-4=0$ tuviese alguna solución entera será alguno de los divisores de 8, que son: ±1, ±2, ±4 o ±8.

Experimentando se ve que vale x = 2 es una solución, pues $2^3-2{\cdot}2^2+4{\cdot}2-8=0$.
Dividiendo por x – 2, se tiene: $x^3-2x^2+4x-8=(x-2)(x^2+4)=0$.

Como el segundo factor (x^2 + 4) es irreducible, no hay más soluciones reales. Por lo tanto, la ecuación dada sólo tiene una solución real, x = 2.

- La ecuación falta en termino independiente.

$8x^3+8x^2-4x=0$

$4x(2x^2+2x-1)=0$

$4x=0$

$x=0$

$2x^2+2x-1=0$

$x=0{,}365$

$x=-1{,}365$

- La ecuación $x^3+x^2+1=0$ no tiene ninguna solución entera.

Por tanto, en este caso no es posible dar la solución.

8.2 Ecuaciones bicuadradas

Una ecuación es bicuadrada, es una ecuación que se encuentra en el rango de cuarto grado, también denominadas cuarticas, y tienen la forma:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

Para resolver, seguir los siguientes pasos:

1- Cambiar las variables, para transformar ecuación de cuarto grado en una de segundo grado.
2- Resolver la ecuación de segundo grado.
3- Sustituir el cambio de variables en ambas soluciones.
4- resolver las dos ecuaciones de segundo grado, obteniendo las cuatro soluciones buscadas.

<u>Ejemplo</u>: Resolver $x^4 + x^2 - 10 = 0$

Se cambia de variable $x^2 = u$

Se obtiene la siguiente ecuación

$$u^2 + u - 10 = 0$$
$$u = \frac{-1 +/- \sqrt{4(1) - 4(1)(-10)}}{2(1)}$$
$$u = \frac{-1 +/- \sqrt{4 + 40}}{2} = \frac{-1 +/- \sqrt{44}}{2}$$

$$u = \frac{-1 +/- 6{,}63}{2}$$
$$u = 3{,}81$$
$$u = -2{,}81$$

Sustituir por los variables originales

$x^2 = u$

$x^2 = 3{,}81$ $\quad$ $x^2 = +/- \sqrt{-2{,}81}$ es raíz imaginaria

$x_1 = 1{,}95$

$x_2 = -1{,}95$

8.3 Ecuaciones con radicales

Para resolver una ecuación con expresiones con radicales, o ecuaciones irracionales, se debe seguir el siguiente procedimiento:

1- Se aísla el radical en uno de los miembros, pasando los demás términos al otro lado de la igualdad, aunque tenga también radicales.
2- Se eleva al cuadrado ambos términos.
3- Se resuelve la ecuación obtenida.
4- Se comprueba si las soluciones obtenidas verifican la ecuación original.
5- Si la ecuación tiene más radicales, se repite los pasos 1 y 2, hasta obtener el resultado final.

<u>Ejemplo</u>: Resolver

$$\sqrt{2x-3}-x=-1$$
$$\sqrt{2x-3}=-1+x$$
$$(\sqrt{2x-3})^2=(-1+x)^2$$

$$2x-3=1-2x+x^2$$
$$x^2-4x+4=0$$
$$(x-2)^2=0$$
$$x=2$$

- $x-\sqrt{x}=6 \;\Rightarrow\; \left(x-\sqrt{x}\right)^2=6^2 \;\Rightarrow\; x^2-x=6 \;\Rightarrow\;$ **x =** 3

8.4 Ecuaciones Racionales

Las ecuaciones racionales son las que aparecen fracciones polinomicas

Para resolver estas ecuaciones, se multiplica ambos términos de la ecuación por el mínimo común denominador, de sus denominadores.
.
En estas ecuaciones se habrá de comprobar que las soluciones obtenidas son válidas, pues al quitar denominadores pueden aparecer soluciones extrañas.

<u>Ejemplo</u>: Resolver la ecuación: $\dfrac{2}{x^2-x}-\dfrac{3}{x-1}=0$

El m.c,m. $(x^2-x)(x-1)$

$$2(x-1)+3(x^2-x)=0$$
$$2x-2+3x^2-3x=0$$
$$3x^2-x-2=0$$
$$x=1$$
$$x=\frac{-4}{6}=\frac{-2}{3}$$

Ejercicios Propuestos: Determinar las raíces de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

1) $2x(x-4)-2(5-x)=56$
2) $(3x+4)(3x-5)=11$
3) $(8+x)^2+(8-x)^2=120$
4) $(3x-4)(4x-5)-(x-13)(x-4)=50$
5) $(2x-4)(4x-3)-(2x-7)(3x-2)=220$
6) $8(2-x)^2=2(8-x)^2$
7) $\frac{x^2-5}{3}-\frac{x^2+6}{6}=15$
8) $\frac{4x-3}{x}=\frac{6-x}{x+2}$
9) $x^2-4x=0$
10) $7x^2+24x=0$
11) $x^2+bx=0$
12) $(x-3)(x-4)=8$
13) $(x-2)(x+6)=8x+9$
14) $(3x+6)(3x-6)=(2x+9)(3x-4)$
15) $(x+2)^2-7x-10=0$
16) $(x+3)^2+(x-2)^2=(x+6)^2$
17) $(x+12)^2=(x+13)^2+(x-4)^2$
18) $2x+\frac{55}{3x+4}=16$
19) $\frac{3}{x+3}-\frac{2}{x-3}=\frac{7}{3}$
20) $x^2-21x+70=0$
21) $x^2-4x-96=0$
22) $x^2-24x-52=0$
23) $x^2-7x-120=0$
24) $4x^2+5x-6=0$
25) $6x^2+5x-1=0$
26) $3x^2-10x-25=0$
27) $7x^2-16x+9=0$

28) $x+\dfrac{16}{x}=9$

29) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{16}{x}+6=0$

30) $\dfrac{x-6}{x+2}=\dfrac{x-1}{3x+10}$

31) $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{x+2}{x}=\dfrac{12}{7}$

32) $\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{2-x}{2}=2$

33) $x^2 + 7ax + 12a^2 = 0$

34) $x^2 - 2ax - 8a^2 = 0$

35) $\dfrac{8-3x}{4-x}-\dfrac{2x}{2-x}=6$

UNIDAD 9. POTENCIACIÓN

Potenciación es una operación matemática entre dos elementos, denominados base y exponente; es una multiplicación de varios factores iguales, al igual que la multiplicación es una suma de varios sumandos iguales

9.1 Potenciación de Monomios

Para elevar un monomio a una potencia, se eleva el coeficiente numérico al exponente indicado por la potencia, y luego se resuelve la parte literal, donde se multiplica el exponente de cada letra por el exponente de la potencia indicada.

Ejemplo Resolver: $(4x^3y^5)^2$,
Trabajar la parte numérica: $4^2 = 4 \times 4 = 16$
Luego la parte literal: $(x^3y^5)^2 = x^{3x2}y^{5x2} = x^6y^{10}$
La respuesta es: $16\ x^6y^{10}$

Ejemplo Resolver: $(ab^3c^2d^3)^8$
Recordar que cuando se analiza la parte literal, hay un 1 (uno), $1^5 = 1$

En la parte literal se tendrá:
$(a^1b^3c^2d^3)^8 = a^{1x8}b^{3x8}c^{2x8}d^{3x8} = a^8b^{24}c^{16}d^{24}$
La respuesta será: $a^8b^{24}c^{16}d^{24}$

9.2 Potenciación de Polinomios

La potencia de polinomios se basa en los conceptos básicos de la potencia, que determina:

$b^n = b \times b \times b \times b \times .... \times b$

Esto es que se debe multiplicar la base (b) por sí misma una cantidad n de veces (n es el exponente).

Ejemplo: Resolver: $(4ab^3 + 2b^2)^3$

Se debe realizar la multiplicación:

$$(4ab^3 + 2b^2)\ (4ab^3 + 2b^2)\ (4ab^3 + 2b^2)$$

El exponente 3 indica que se multiplicara por sí mismo tres veces.
Realizando la multiplicación:
$(4ab^3 + 2b^2)\ (4ab^3 + 2b^2)\ (4ab^3 + 2b^2) = (16a^2\ b^6+16a\ b^5+4b^4)\ (4ab^3 + 2b^2)$
$(16a^2\ b^6+16a\ b^5+4b^4)\ (4ab^3 + 2b^2) = 64a^3\ b^9+64a^2\ b^8+16ab^7+32a^2b^8+32ab^7+8b^6$

9.3 Propiedades de la potenciación

Multiplicación de potencias de la misma base:

La multiplicación de dos potencias que tengan la mima base, es igual a otra potencia de la misma base y que tiene como exponente a la suma de los exponentes respectivos.
Simbólicamente: $a^n * a^m = a^{n+m}$

Ejemplo: $x^8 \times x^{10} \times x^2 = x^{8+10+2} = x^{20}$

División de potencias de igual base:

La división de dos potencias de igual base, es otra potencia de la misma base y cuyo exponente es igual a la resta de los exponentes del término dividendo menos el del divisor.

Simbólicamente: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ con a ≠ 0 y m>n

Ejemplo: $\frac{x^{12}}{x^3} = x^{12-3} = x^9$

Potencia de potencia:

La potencia de una potencia es igual a otra potencia de la misma base y tiene como exponente a la multiplicación de los exponentes que halla en la expresión

Simbólicamente: $(a^n)^m = a^{m \bullet n}$

Ejemplo: $\left\{\left[\left(x^2\right)^2\right]^3\right\}^2 = \left(x^2\right)^{2\times3\times2} = \left(x^2\right)^{12} = x^{24}$

Potencia de una multiplicación

La potencia de una multiplicación de dos términos, es igual cada término elevado al exponente de la potencia original.

Simbólicamente: $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

Ejemplo: $(x * y)^3 = x^3 * y^3$

Potencia de una división:

La potencia de una división es igual al cociente de dichas potencias.

Simbólicamente: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ b ≠ 0

Ejemplo: $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$

Potencia de exponente cero:

Toda potencia de exponente cero, y que tenga como base distinta a cero, es igual a 1

Simbólicamente: $a^0 = 1$ a ≠ 0

La expresión 0^0 no está definida

Potencia con exponentes enteros negativos:

Si el exponente **(n)** es cualquier entero negativo y la base **(a)** sean los componentes de un número real diferente de cero, se invierte la expresión para transformarse en expresión inversa, y se cumple que:

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ o que $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

- Cuando la base es un número racional se tiene que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

Ejemplos:

$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ $\qquad$ $\left(\frac{x}{y}\right)^{-2} = \left(\frac{y}{x}\right)^{3}$

Potencia con exponentes fraccionarios: Toda expresión matemática elevada a un exponente fraccionario pertenece a una raíz cuyo índice es el denominador del exponente y la cantidad sub-radical la misma cantidad elevada a la potencia que indica el numerador del exponente.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^{m}}$$

Ejemplos:

$\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{4}{5}\right)^{2}}$ $\qquad$ $3a\sqrt[4]{(mn)^3} = 3a(mn)^{\frac{3}{4}}$

Ejercicios para resolver

1. Indicar si el signo del resultado es positivo o negativo:

a. $(-3)^{-2}$ $\qquad$ **b.** $(5)^{-3}$

2. Expresar como potencia:

a) -2*-2*-2*-2*-2*=
b) -7*-7*+7*-7=
c) (-4). (-4). (4). (-4) =

3.Calcular:

a. $(-5)^3 =$ $\qquad$ b. $(-12)^4 =$ $\qquad$ c. $(-2)^7 =$

d. $\left(\frac{3}{7}\right)^4 =$ $\qquad$ e. $\left(-\frac{5}{2}\right)^4 =$ $\qquad$ f. $\left(\frac{7}{6}\right)^{-3} =$

g. $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3}$

4.Aplicar las propiedades

a. $a^2 \cdot a^3 =$ b. $x^6 : x^4 =$ c. $a^7 \div a =$ d. $(b^3)^4 =$

e. $2^3 \cdot 2^7 \cdot 2^{15} =$ f. $a^8 \cdot a^6 \cdot a^{10} =$ g. $((x^2)^3)^4 =$ h. $a^{13} \div a^6 =$

i. $\dfrac{x^4 y^7}{x^2 y^{11}} =$ j. $\dfrac{x^3}{x} \cdot \dfrac{y^7}{y^2} \cdot \dfrac{z^{12}}{z^5} =$ k. $\left\{\left[(-2)^5\right]^4\right\}^2$ l. $(5x)^2$

5. Resolver aplicando las propiedades de la potencia:

$a)\ (-2)^5 =$ b) $(-3)^5 =$ c) $-8^5 =$ d) $-6^{-5} =$

$e)\ \left[\left(\dfrac{1}{4}\right)^5\right]^0 =$ f) $4^{2^5} =$ g) $\left(5^2\right)^3 =$ h) $\left[\left(\dfrac{1}{5}\right)^3\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\right]^{44} =$

$i)\ \left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^7 : \left(\dfrac{3}{5}\right)^3\right]^3 =$ j) $\dfrac{3^{-4} \cdot 4^2 \cdot 2 \cdot 9^{-1} \cdot 3^{-2}}{2^{-5} \cdot 4 \cdot 3^{-3} \cdot 9} =$ k) $\dfrac{a^3 \cdot b^5 \cdot c^4}{a \cdot b^3 \cdot c^3} =$

UNIDAD 10. RADICACIÓN

La radicación es el proceso inverso de la potenciación Es la operación que consiste en obtener la raíz de una cifra o de un enunciado. De esta forma, la radicación es el proceso que, conociendo el índice y el radicando, permite hallar la raíz.

- **Radicales**

Un radical es una expresión de la forma $\sqrt[n]{a}$, en la que "n" es el índice del radical , "a" el radicando, y se obtiene un resultado llamado raíz. La expresión que la antecede a la raíz se denomina coeficiente del radical.

$$K \sqrt[n]{a} = R$$

- **Raíz cuadrada de un número**

En matemáticas la raíz cuadrad de un número **y,** es otro número **x**, que al multiplicarse por sí mismo da como resultado el valor **x.** es decir cumple con la ecuación:

$$y^2 = x^1$$

$\sqrt{y} = x,\ si\ solo\ si: y^2 = x$, donde **x** es la raíz cuadrada de **y**

Ejemplo: $\sqrt{36} = 6 \quad porque\ 6^2 = 36$

- **Raíz cubica de un número**

La raíz cubica de un número **y,** son números que satisfagan la ecuación:

$$y^3 = x$$

Si x, y, son números reales, se obtendrá una sola solución.

$\sqrt[3]{y} = x,\ si\ solo\ si: x^3 = y$, donde **x** es la raíz cúbica de **y**

Ejemplo: $\sqrt[3]{27} = 3 \quad porque\ 3^3 = 27$

- **Raíz enésima de un número**

La raíz enésima de un número real **y**, es otro número **x** (raíz) que multiplicando por el número de veces del índice del radica se obtiene el radicando

$\sqrt[n]{y} = x,\ si\ solo\ si: x^n = y$, donde **x** es la raíz enésima de **y**

Ejemplo: $\sqrt[5]{32} = 2 \quad porque\ 2^5 = 32$

10.1 Radicación de monomios

Como en la potenciación, la radicación de monomios se debe proceder por separado la parte numérica y la parte literal.

En la parte numérica se extrae la raíz correspondiente; y en la parte numérica se divide el exponente de cada letra entre el grado del radical. (en una raíz cuadrada el grado del radical es dos, en una raíz cúbica el grado del radical es tres, y así sucesivamente).

Ejemplo, sacar la raíz cuadrada del monomio $\sqrt{9x^8 y^4}$

La parte numérica: $\sqrt{9} = 3$

La parte literal: $\sqrt{x^8 y^4} =$ $x^{8\div 2}y^{4\div 2} = x^4y^2$ (el grado del radical es 2)

La respuesta será: $3\ x^4y^2$

El ejemplo, $\sqrt[3]{(27a^9b^3)}$, sacar la raíz cúbica del monomio $27a^9b^3$

La parte numérica: $\sqrt[3]{27} = 3$

La parte literal: $\sqrt[3]{a^9b^3} = a^{9\div 3}y^{3\div 3} = x^3y^1$ (el grado del radical es 3)

La respuesta será: $3a^3b$

Exponentes racionales

Es una propiedad compartida entre la potenciación y la radicación, actualmente en los cálculos matemáticos se trabaja con potencias, ya que en las derivadas y los integrales no existen fórmulas para operar con radicales.

$$\sqrt[n]{x^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Ejemplo: $\sqrt[3]{4^2} = 4^{\frac{2}{3}}$

10.2 PROPIEDADES DE LOS RADICALES.

Raíz n- ésima de un número real elevado a la potencia n:

La raíz n-ésima para cualquier número **y** a todo número real **x**, que satisfaga la ecuación:

$$x^n = y$$

Si no se cumple la ecuación, **y**, no tendrá raíz n-esima.

Ejemplo: determinar la raíz cuarta de 16

$$\sqrt[4]{16} = +/-2$$

Porque $2^4 = 16$ y $(-2)^4 = 16$

Raíz n- ésima de un producto:

La raíz n- ésima de una multiplicación es igual al producto de las raíces n ésimas de los factores.

$$\sqrt[n]{a \bullet b} = \sqrt[n]{a} \bullet \sqrt[n]{b}$$

<u>**Ejemplo**</u> $\sqrt[3]{128}$

$$\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{64 * 2} = \sqrt[3]{64} * \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$$

Raíz n- ésima de una división: la raíz enésima de una división es igual al cociente de las raíces n- ésimas del dividendo y del divisor.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

<u>**Ejemplo**</u> $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}$$

Raíz n- ésima de una raíz:

La raíz enésima de una raíz es igual a otra raíz, cuyo índice es el producto de los índices. Para todo $m, n, b, \in Z^+$, se cumple que:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m\times n]{b}$$

Ejemplo $\sqrt[5]{\sqrt[2]{6}}$

$$\sqrt[5]{\sqrt[2]{6}} = \sqrt[5*2]{6} = \sqrt[10]{6}$$

Propiedad fundamental de los radicales:

Se puede multiplicar o dividir el índice de la raíz y el exponente del radicando por un mismo número y el valor de la raíz no cambia, por tanto

$$\sqrt[kn]{b^{km}} = b^{km/kn} = b^{m/n} = \sqrt[n]{b^n}\text{, donde } k \in N$$

Se debe tener en cuenta que, si n es par, entonces el radicando debe ser positivo para que exista una raíz real.

Ejercicio $\sqrt[3]{4^2}$

$$\sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3*2]{4^{2*2}} = 4^{\frac{2*2}{3*2}} = 4^{\frac{2}{3}}$$

10.3 Racionalización de una fracción

El objetivo de racionalizar una fracción algebraica es cambiar la fracción de denominador irracional en otra fracción de denominador racional.

Al racionalizar una fracción de denominador irracional, desaparece todo signo radical del denominador.

Se presentan dos casos:

- **Cuando el denominador es monomio**
-

Cuando en una fracción, denominador es monomio y aparece un radical, se multiplican tanto el numerador como el denominador por el radical de la expresión, para que el divisor se convierta en una cantidad racional.

Ejemplo $\dfrac{4a}{\sqrt{2a^2x}}$

Se debe multiplicar ambos términos por el radical, convirtiendo en una expresión racional

$$\frac{4a}{\sqrt{2a^2x}} = \frac{4a*\sqrt{2a^2x}}{\sqrt{2a^2x}*\sqrt{2a^2x}} = \frac{4a*\sqrt{2a^2x}}{2a^2x}$$

$$= \frac{2\sqrt{2a^2x}}{a\ x}$$

Ejemplo $\frac{2}{7\sqrt[3]{3x}}$

Se multiplica ambos términos por $7\sqrt[3]{3x}$ porque esta cantidad multiplicada por $\sqrt[3]{3x}$ da una raíz exacta

$$\frac{2}{7\sqrt[3]{3x}} = \frac{2*7\sqrt[3]{3x}}{7\sqrt[3]{3x}*7\sqrt[3]{3x}} = \frac{2*7\sqrt[3]{3x}}{49(3x)}$$

$$\frac{2*7\sqrt[3]{3x}}{49(3x)} = \frac{2\sqrt[3]{3x}}{21x}$$

- **Cuando el denominador es binomio**

Cuando el denominador es binomio, se multiplican tanto el numerador como el denominador por la relacionada (conjugada) del denominador y se simplifica el resultado.

Expresión conjugada

Una expresión es conjugada, cuando contiene radicales de segundo grado y que difieren unas de otras solamente en el signo que las separan, es decir:

$3\sqrt{2} - \sqrt{7}$ la conjugada de la anterior expresión es: $3\sqrt{2} + \sqrt{7}$

Ejemplo Racionalizar $\frac{6}{2\sqrt{3} - 4\sqrt{5}}$

Analizando, el denominador tiene dos radicales

Se multiplica los términos de la fracción por la conjugada del denominador $2\sqrt{3} + 4\sqrt{5}$ obteniendo:

$$\frac{6}{2\sqrt{3}-4\sqrt{5}}=\frac{6}{2\left(\sqrt{3}-2\sqrt{5}\right)}=\frac{3}{\sqrt{3}-2\sqrt{5}}$$

$$\frac{3}{\sqrt{3}-2\sqrt{5}}*\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}}=\frac{3(\sqrt{3}+2\sqrt{5})}{(\sqrt{3})^2+\sqrt{3}*2\sqrt{5}-\sqrt{3}*2\sqrt{5}-(2\sqrt{5})^2}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}+6\sqrt{5}}{3-4(5)}=\frac{3\sqrt{3}+6\sqrt{5}}{-17}$$

10.4 Ecuaciones con radicales o irracionales

Las ecuaciones con radicales o llamadas también irracionales son aquellas en las cuales la incógnita aparece bajo un signo radical.

Se debe seguir el siguiente procedimiento:

1- Se aísla el radical en uno de los miembros, pasando los demás términos al otro lado de la igualdad, aunque tenga también radicales.
2- Se eleva al cuadrado ambos términos.
3- Se resuelve la ecuación obtenida.
4- Se comprueba si las soluciones obtenidas verifican la ecuación original.
5- Si la ecuación tiene más radicales, se repite los pasos 1 y 2, hasta obtener el resultado final.

Resolver $5-\sqrt{3x+1}=0$

Aislando $5=\sqrt{3x+1}$

Se eleva al cuadrado ambos términos para eliminar los radicales:

$(5)^2=(\sqrt{3x+1})^2$ Se obtiene :

$$25=3x+1$$
$$3x=25-1$$
$$x=\frac{24}{8}=3$$

Ejemplo Resolver $\sqrt{14x-8}-\sqrt{3x-4}-2\sqrt{3x+1}=0$

Aislar el radical $\sqrt{14x-8}-\sqrt{3x-4}=2\sqrt{3x+1}$

Elevar al cuadrado y resolver las operaciones indicadas

$$(\sqrt{14x-8}-\sqrt{3x-4})^2=(2\sqrt{3x+1})^2$$
$$(14x-8)-2(\sqrt{14x-8}*\sqrt{3x-4})+3x-4=4(3x+1)$$
$$14x-8+3x-4-12x-4=2(\sqrt{14x-8}*\sqrt{3x-4})$$
$$5x-16=2(\sqrt{14x-8}*\sqrt{3x-4})$$
$$(5x-16)^2=(2(\sqrt{14x-8}*\sqrt{3x-4}))^2$$
$$25x^2-160x+256=4(14x-8)(3x-4)$$
$$25x^2-160x+256=4(42x^2-80x+32)$$
$$25x^2-160x+256=168x^2-320x+128$$
$$25x^2-160x+256-168x^2+320x-128=0$$
$$-143x^2+160x+128=0(-1)$$
$$143x^2-160x-128=0$$
$$x=\frac{160\pm\sqrt{(160)^2-4(143)(-128)}}{2(143)}=\frac{160\pm\sqrt{98816}}{286}=\frac{160\pm314{,}35}{286}$$
$$x=1{,}659$$
$$x=0{,}540$$

<u>Ejemplo</u> Resolver $\sqrt{8x^2-4}-2x=-1$

Aislar el radical $\sqrt{8x^2-4}=2x-1$

Elevar al cuadrado ambos términos para eliminar el radical

$$(\sqrt{8x^2-4})^2=(2x-1)^2$$
$$8x^2-4=4x^2-4x+1$$

Igualar a cero y resol ver las operaciones indicadas:

$$8x^2-4x^2+4x-3=0$$
$$4x^2+4x-3=0$$
$$\frac{(4x+6)(4x-2)}{4}=0$$
$$(2x+3)(2x-1)=0$$
$$2x=-3\Rightarrow x=\frac{-3}{2}$$
$$2x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

<u>Ejercicios para resolver</u>

1.Calcular

a. $\sqrt{36}=$ b. $\sqrt[2]{248}$ c. $\sqrt{100}=$ d. $\sqrt{121}=$

e. $\sqrt[3]{216}=$ f. $\sqrt[4]{16}=$ g. $\sqrt[3]{125}=$ h. $\sqrt[4]{81}=$

i. $\sqrt[3]{2432}=$ **j.** $\sqrt[100]{1}=$

3. Escribir en forma de radical las siguientes expresiones

a. $3^{\frac{2}{3}}$ b. $3^{\frac{3}{4}}$ c. $5^{\frac{21}{2}}$ d. $x^{\frac{2}{3}}$

4. Escribir en forma de potencia

a. $\sqrt{8}$ b. $\sqrt[5]{4}$ c. $\sqrt[3]{7}$ d. $\sqrt{5}$

5.Resolver aplicando las propiedades de la potenciación y la radicación:

$a)\sqrt{9b^6c^2}\ =$ b) $\sqrt[3]{-27m^9y^3}\ =$

$c)\sqrt[5]{-32a\cdot b^{10}c^{15}}\ =$ d) $\sqrt[6]{64p^{-6}q^{18}r^{24}}\ =$

$e)\sqrt{1.21a^{-2}b^{-1}c^4}\ =$ f) $\sqrt[3]{0{,}064y^{-3}x^{-12}}\ =$

6.Aplicar las propiedades de la radicación y comprobar

a. $\sqrt{100\times 3}$ b. $\sqrt{\frac{144}{9}}$ c. $\sqrt{\sqrt[5]{3}}$ d. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt{7}}}$ e. $\sqrt[7]{3^7}$

7. Introducir factores dentro del radical:

$a)4a^2b\sqrt{ab}$ b) $\frac{2}{5}m^3n^3\sqrt[3]{9m}$

$c)\frac{1}{2}y^3b\cdot\sqrt[3]{\frac{8b}{9y^2}}$ d) $\frac{a^2x\cdot y}{b^3m}\sqrt[4]{\frac{b^3m^2}{y}}$

$e)a\cdot b\cdot c^3\sqrt{2b}=$ f) $3{,}1mn^2\sqrt[5]{30m^{-2}}\ =$

8. Extraer del radical todos los factores posibles:

$a)\sqrt[3]{12a^3m^6} =$

$b)\sqrt[3]{b^4c^{12}y^{-9}} =$

$c)\sqrt[5]{-25m^{15}y^7} =$

$d)\sqrt{a^2b^7c^6} =$

$e)\sqrt{\frac{16a^5}{8b^8}} =$

$f)\sqrt[3]{104ab^{-3}} =$

9. Racionalizar las siguientes expresiones:

$a)\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} =$

$b)\frac{n}{\sqrt[2]{b}} =$

$c)\frac{\sqrt{a^3}}{4\cdot\sqrt[5]{a^2}} =$

$d)\frac{2}{2-\sqrt{2}} =$

UNIDAD 11. Logaritmos

Logaritmo es un número real positivo, es el exponente al cual se debe elevar la base para obtener el número previsto.

$$Log_a x = n \Rightarrow x = a^n$$

Se lee "logaritmo en base **a** de **x** en base a es igual a **n**", pero debe cumplir con la condición general de que a (la base) sea mayor que cero y a la vez distinta de uno:

$a > 0$

$a \neq 1$

Para precisar el concepto, se puede decir que **logaritmo es solo otra forma de expresar la potenciación,** como en este ejemplo:

$5^2 = 25 \Rightarrow Log_5 25 = 2$

Se leerá: **logaritmo de 5 en base 25 es igual a 2**

Se determina que una potencia se puede enunciar como logaritmo y un logaritmo se puede formular como potencia.

$$Log_a x = n \Rightarrow x = a^n$$

Los elementos recibirán las denominaciones de acuerdo a la ubicación en el logaritmo o en la potencia, así:

a= Base del de la potencia. Base del Logaritmo.
X= Base del Logaritmo. Resultado de la potencia.
n= Exponente de la potencia. Resultado del logaritmo.

Podemos preguntarnos: ¿Que es el logaritmo?
El logaritmo es "el exponente" por el cual se ha elevado una base para obtener la potencia.

Ejemplo:

$Log 5 = 0{,}6989.....$

El resultado 0, 6989….) es el exponente por el cual debemos elevar la base (10) para obtener la potencia (5): 0,6989…^{10} = 5

Ejemplo:

$$\mathbf{log}_2 1 = 0$$

El resultado (0) es el exponente por el cual se debe elevar la base (2) para obtener la potencia (1): $2^0 = 1$

Ejemplo:

$$Log_{\frac{1}{3}} 0,5 = y$$

El resultado (y) es el exponente por el cual se debe elevar la base (1/3) para conseguir la potencia (0,5), en este caso hay que despejar el exponente **y:**

$$\left(\frac{1}{3}\right)^y = 0,33$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^y = \left(\frac{1}{3}\right)^{0,33} \Rightarrow y = 0,33$$

Ejemplo:

$$\mathbf{log}_{\sqrt{5}} 125 = \mathbf{y} \Rightarrow \left(\sqrt{5}\right)^y = 125 \Rightarrow 5^{\frac{1}{2}y} = 5^3$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{y} = 3 \Rightarrow \mathbf{y} = \frac{3}{1} \div \frac{1}{2} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{1} = 6$$

Ejemplo:

$$Log 0,0001 = y$$

Es necesario determinar que este logaritmo es de base 10.

$$Log 0,0001 = y$$

$$10^y = 0,0001$$

$$10^y = 10^{-4} \Rightarrow y = -4$$

Ejemplo:

$$\log_{\sqrt{3}} \sqrt[5]{\frac{1}{81}} = y \Rightarrow \left(\sqrt{3}\right)^{y} = \sqrt[5]{\frac{1}{81}} \Rightarrow 3^{\frac{1}{2}y} = \sqrt[5]{\frac{1}{9^{4}}} \Rightarrow 3^{\frac{1}{2}y} = 3^{-\frac{4}{5}}$$

$$\frac{1}{2}y = -\frac{4}{5} \Rightarrow y = -\frac{4}{5} \div \frac{1}{2} = -\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{1} = -\frac{8}{5}$$

Cuando los logaritmos tienen como base **e**, se denominan logaritmos **Neperianos o logaritmos naturales.**

$$Lnx = y \Rightarrow x = e^{y} \Rightarrow Lx = y$$

Para representarlos se escribe **ln** o bien **L**. La base **e** está implícita.
Algunos ejemplos de logaritmos neperianos son:

ln 1 = 0; puesto que $e^0 = 1$
ln $e^2 = 2$; puesto que $e^2 = e^2$
ln $e^{-1} = -1$; puesto que $e^{-1} = e^{-1}$

El número e tiene gran importancia en las Matemáticas. No es racional (no es cociente de dos números enteros) y su valor, con seis cifras decimales, es
e = 2,718281...

Ejemplo:

$$Ln\frac{1}{e^{3}} = y$$

$$e^{y} = \frac{1}{e^{3}} \Rightarrow e^{y} = e^{-3} \Rightarrow y = -3$$

11.1 Propiedades de los logaritmos

a) No existe el logaritmo de un número con base negativa.

$$\nexists \log_{-a} x$$

b) El logaritmo de un número negativo, no existe.

$$\nexists \log_{a}(-x)$$

c) No existe el logaritmo de base cero.

$\nexists \log_a 0$

d) El logaritmo de cualquier base 1 es cero.

$\log_a 1 = 0$

e) Cuando en un logaritmo la base y el numero son iguales, es igual a uno.

$\log_a a = 1$

f) Cuando la base de un logaritmo de una potencia en base a es igual al exponente.

$\log_a a^n = n$

g) El logaritmo de una multiplicación, es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

$\log_2 (4 \cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$

h) El logaritmo de una división es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor:

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_2 \left(\frac{8}{4}\right) = \log_2 8 - \log_2 4 = 3 - 2 = 1$$

i) El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base:

$\log_a (x^n) = n \log_a x$

$\log_2 (8^4) = 4 \log_2 8 = 4 \cdot 3 = 12$

j) El logaritmo de una raíz es igual al cociente entre el logaritmo del radicando y el índice de la raíz:

$$\log_a\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n}\log_a x$$

$$\log_2\left(\sqrt[4]{8}\right) = \frac{1}{4}\log_2 8 = \frac{1}{4}\cdot 3 = \frac{3}{4}$$

k) Cambio de base:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_2 4 = \frac{\log_4 4}{\log_4 2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1}\cdot\frac{2}{1} = 2$$

11.2 Logaritmos decimales:

Se denomina logaritmo decimal, logaritmo común o logaritmo vulgar, al logaritmo que tienen base 10, es el exponente al que se debe elevar 10.

Por ejemplo:

Log. 0,0001= -4

Log. 0,001= -3

Log. 0,01= -2

Log. 0,1= -1

Log. 1= 0

Log. 10= 1

Log. 100= 2

Log. 1000= 3

11.3 Ecuaciones logarítmicas

Una ecuación logarítmica, es aquella en que la incógnita aparece afectada por un logaritmo.

Para resolver ecuaciones logarítmicas se debe recordar las propiedades de los logaritmos base 10, y son los mismos que se aplican a los logaritmos Neperianos, Se debe verificar las soluciones para que no existan logaritmos negativos o nulos.

Se debe seguir los siguientes pasos:

1- Colocar los logaritmos en uno de los miembros de la ecuación.
2- Aplicar las propiedades de los logaritmos.
3- Resolver la ecuación que queda.
4- Comprobar la valides de las soluciones obtenidas

Las propiedades de los logaritmos.

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a a^n = n$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a (x^n) = n \log_a x$$

$$\log_a \left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n} \log_a x$$

$$\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$$

$$x = \log_a b \quad \Rightarrow \quad a^x = b$$

Ejemplo Resolver $3Log x = Log \frac{x}{4} - \frac{2}{7}$

$$3Logx = Log\frac{x}{4} - \frac{2}{7}$$

$$3Logx - Log\frac{x}{4} = -\frac{2}{7}$$

$$Log\frac{x^3}{\frac{x}{4}} = -\frac{2}{7}$$

$$Logx^3 * \frac{4}{x} = -\frac{2}{7} \Rightarrow Log4x^2 = -\frac{2}{7}$$

$$4x^2 = 10^{\frac{-2}{7}}$$

$$4x^2 = 0{,}51794 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{0{,}51794}{4}}$$

$$x = \pm 0{,}3598$$

<u>Ejemplo</u> Resolver $Ln(x-2) - Ln(x^2-4) = Ln\left(\frac{1}{4}\right)$

$$Ln(x-2) - Ln(x^2-4) = Ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$Ln\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right) = Ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

$$x + 2 = 4$$

$$x = 2$$

EJERCICIOS DE LOGARITMOS

1. Calcular:

1) $\log_2 6 =$

2) $\log_3 15 =$

3) $\log_4 6 =$

4) $\log_{27} 9 =$

5) $\log_{5} 0{,}4 =$

6) $\log_{3} 0{,}75 =$
R : – 2

7) $\log_{0{,}5} 16 =$
R : – 4

8) $\log_{0{,}1} 1000 =$

9) $\log 25 + \log 1 =$

10) $\log_{3} 27 - \log_{3} 5 =$

11) $\log_{4} 64 + \log_{8} 64 =$

12) $\log_3 0{,}1 - \log_3 0{,}01 =$

13) $\log 6 + \log 36 =$

14) $\log 2 - \log 00{,}2 =$

15) $\log 64 / \log 2 =$

16) $\log 4 / \log 24 =$

17) $\log_2 5 \times \log_3 9 =$

18) $\log_9 29 \div \log_3 7 =$

2.Utilizandando la definición de logaritmo $\log_b a = n \Leftrightarrow b^n = a$.

Calcular los siguientes logaritmos:

$a)\ \log_2 18 =$ $\quad$ b) $\log_{1/3} \frac{1}{81} =$ $\quad$ c) $\log_3 5 =$

$d)\ \log_2(120) =$ $\quad$ e) $\log_4 \frac{1}{5} =$ $\quad$ f) $\log_{1/3}\left(\frac{1}{3}\right) =$

3.Conociendo que para cambio de base de los logaritmos se usa:

$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$**. Utilizando la calculadora resolver:**

$a)\ \log_3 27 =$ $\quad$ b) $\log_4 \pi =$ $\quad$ c) $\log_5 4{,}2 =$ $\quad$ d) $\log_{1/4} 98125 =$

4. Aplicar las propiedades de logaritmo a las siguientes expresiones:

$a)\ \log \sqrt[n]{b} =$ $\quad$ b) $\log a \cdot \sqrt[n]{b} =$

$c)\ \log\left(a^5 \cdot b^2\right)^{4/3} =$ $\quad$ d) $\log\left[\dfrac{\sqrt{a \cdot b}}{c}\right]^{\frac{-3}{4}} =$

5. Calcular el valor de “x”:

$a)\ \log_x 9 = 4$ $\quad$ b) $\log_x 26807 = 8$

$c)\ \log_x 0{,}0325625 = -8$ $\quad$ d) $\log_x 5 = \dfrac{1}{5}$

6. Resolver las siguientes ecuaciones:

$a)\ (1,4)^{3x+2,8} = 2,0320$ b) $3^{(2x+1)} + 3^{(2x-1)} = 30$

$c)\ \log_2 x + 5 \cdot \log_2 (7x) = 4$ d) $\log_{12}(4x+12) = 0$

$e)\ 3^{-x} = 1021$ f) $4^{\left(\frac{x}{2}+2\right)} = 745$

7. Calcular el valor de "k" en cada una de las siguientes igualdades:

$a)\ (\log_x 36) + (\log_x 4) = 12$

b) $(\log_2 x) + (\log_2 4) = 8$

$c)\ (\log_3 x) - (\log_3 4) = 6$

8. Determinar el valor de x:

1) $\log_3 81 = x$

2) $\log_5 0,3 = x$

3) $\log_4 21 = (2x - 1)/2$

4) $\log_2 25 = x^3/3$

5) $\log_2 x = -5$

6) $\log_7 x = 5$

7) $\log_3 [4(x - 1)] = 9$

8) $\log_7 [3(x^3 + 5)] = 6$

9) $\log_x 126 = 4$

10) $\log_x 50 = -3$

11) $\log_{4x+3} 81 = 7$

12) $2x + 1 = 10^{\log 5}$

13) $x = 12^{4 \log 2}$

14) $x = \log 4 / \log 3$

15) $x = \log 725 / \log 125$

16) $\log (2x + 1) / \log (2x - 1) = 3$

17) $\log (x - 8) / \log (x - 2) = 0{,}4$

9. Si $\log 2 = 0{,}301$, $\log 3 = 0{,}477$ y $\log 7 = 0{,}845$, entonces:

1) $\log 4 =$

2) $\log 12 =$

3) $\log 5 =$

4) $\log 26 =$

5) $\log 85 =$

6) $\log 0{,}75 =$

7) $\log (3 / 2) =$

8) $\log (1 / 58) =$ R : -1

9) $\log (1 / 24) =$

10) $\log (2 / 5) =$

11) log 0,5 =

12) log 2,25 =

10. SELECCIÓN MULTIPLE

1) Si log a = x. Entonces log 20 a es igual a:

a) 20 +x
b) 20 x
c) 2x
d) 1 +x
e) N.A

2) $\log_5 \sqrt{16} =$

a) $\frac{3}{2}$
b) $\frac{2}{3}$
c) - $\frac{3}{2}$
d) $\frac{-2}{3}$
e) 2
f) N.A.

3) Si f(x) = $\log_5 x$ .Entonces f(125)

a) 1
b) 2
c) 4
d) 3
e) 5
f) N.A.

4) $\log_{a-b}(a^2 - 2ab + b^2)$ es igual a:

a) a-b
b) a+b
c) a
d) b
e) 2

5) En la ecuación: $\log_3(5x-3)-\log_3 x=1$

a) 0
b) 2
c) 10
d) 22
e) 20

6) Si f(x) = 2^x y g(x) = $\log_2 x$.Entonces f(2) + g(8) =

a) 7
b) -3
c) 5
d) 3
e) N.A

7) El valor de la expresión: $\log 0{,}01+\log_{0.4} 0{,}0081$ es:

a) 5
b) 6
c) 10
d) -6
e) 397
f) N.A.

8) En la expresión $\log_{\frac{2}{3}} x=-2$ el valor de x es :

a) $\frac{2}{3}$
b) $\frac{-2}{3}$
c) $\frac{3}{2}$
d) $\frac{-3}{2}$

e) $\frac{9}{4}$

9) El desarrollo de la expresión $\ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$

a) Log x^2 + Log (x+1)
b) 2ln x
c) Ln x
d) 2ln x -1
e) Lnx^2-ln(x+1)

10) Respecto a función f(x) = $(\frac{1}{3})^x$ se puede afirmar que:

<u>I. Es creciente</u>
<u>II. Es decreciente</u>
<u>III. No intersecta al eje</u> x

a) Solo I
b) Solo II
c) Solo III
d) Solo I y II
e) I y III

11) Si f(x) = 3^x, g(x) = 2^x entonces f (3) – g (5):

a) 7
b) -7
c) -4
d) 4
e) -5

12) Log x -3 equivale a:

a) $\frac{\log x}{1000}$
b) $\frac{\log x}{3}$
c) Log$(\frac{x}{100})$
d) Log 1000x
e) Log3x

13) El valor de la expresión: $\log_2 8 + \log_3 81 - \log 1000 + \log 0{,}000001$

a) 2
b) 4
c) -2
d) 3
e) N.A

14) log x + log $\frac{1}{x^2}$ equivale a :

a) 3log x
b) 3
c) $\frac{-2}{3}$
d) -2log x
e) –log x

15) $\log_{\frac{1}{5}} p = -3$ El valor de p es:

a) 125
b) 105
c) -125
d) 45
e) -45

16) La función inversa de f(x) = $\log_4 x$ es:

a) 4
b) y^4
c) e^4
d) 4^x
e) N.A

17)Si h(x) = $\frac{2^x - 2^x}{2^x + 2^x}$ Entonces h(3)=

a) 4
b) -4
c) 0
d) -6
e) N.A

18) Si log 2 = 0,301 log 3 = 0,477. Entonces calcular log 108

a) 13
b) -10

c) 4
d) -4
e) -13

19) log $_6$ (2(x^3 + 5)) = 3

a) $\sqrt[5]{103}$
b) $\sqrt[3]{103}$
c) $\sqrt{103}$
d) 216
e) No se puede calcular

20) log $_x$ 9 = 0.5

a) 23
b) -2
c) -3
d) 3
e) N.A

U21) $\log_3 81 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 9 \cdot \log_x 5^{-3} = 24$, entonces $x = ?$

a) –3
b) –2
c) 3
d) 5
e) 8

22) Al simplificar $\log \sqrt[3]{40} + \log \sqrt[3]{25} = ?$ se obtiene:

a) $\log 1$
b) $\log 10$
c) $\log 100$
d) $\log 1.000$
e) $\log 10.000$

23) La Energía liberada en un terremoto está dada por la fórmula: log E = 3,5 R + 12,9 donde E es la energía liberada medida en Ergios y R es la magnitud del sismo en grados de la escala de Richter.
¿Qué cantidad de energía se libera en un temblor de grado 4?

24) D = 10 log (I * 10$^{12)}$; calcular la intensidad si los decibeles son 160

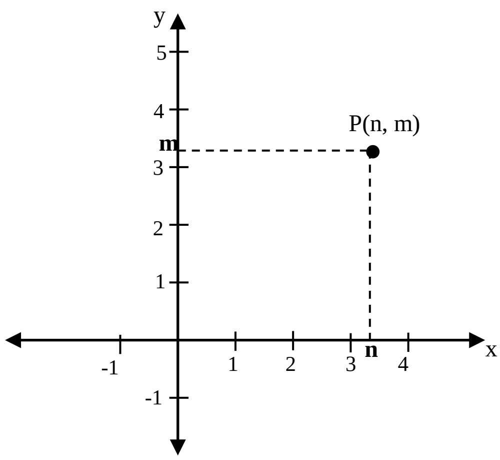
a) 0
b) 10
c) 100
d) 1000
e) 10000
f) 1000000

UNIDAD 12. LÍNEA RECTA

La recta o línea recta es un conjunto de puntos infinitos alineados en una misma dirección.

Las rectas no tienen comienzo ni final, están compuestos por puntos que se suceden de manera infinita.

12.1 Ejes de Coordenadas Cartesianas



El eje de Coordenadas Cartesianas, son un par de rectas(ejes) que se cruzan entre sí en forma perpendicular y se regulan con escalas de medición indistintamente, la intersección de las rectas se considera el origen de las coordenadas.

El eje horizontal (eje x) se denomina eje de las abscisas y el eje vertical (eje y) se denomina eje de las ordenadas.

En el sistema de ejes coordenadas es pueden colocar todos los pares de puntos ordenados de la forma (n, m), como lo muestra la figura.

En el punto P (n, m) los elementos n y m se denominan coordenadas del punto P

12.2 Distancia entre dos puntos.

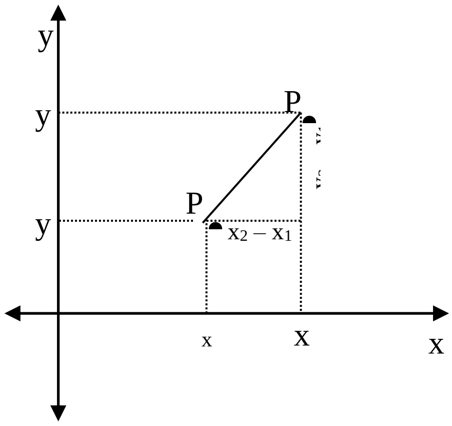
Cuando los puntos se encuentran en eje x, o paralela a este eje, la distancia entre dos puntos es igual al valor absoluto de sus abscisas (x).
Por ejemplo: la distancia entre los puntos A (-3,0), B (5,0) es 3+5= 9 uni.

Cuando los puntos se encuentran ubicados en eje y (ordenadas), o paralela a este eje, la distancia de dos puntos es igual a la diferencia del valor absoluto de sus ordenadas(y)

Por ejemplo: la distancia entre los puntos A (0,4), B (0,-5) es 4-5= 1 uni.

Cuando los puntos se encuentran ubicados en cualquier lugar de los ejes cartesianos, se realiza el siguiente procedimiento.

Suponiendo que $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$
Son dos puntos del plano tal como se observa en la figura.
La distancia entre P_1 y P_2 se determina, mediante el teorema de Pitágoras, de la siguiente manera:



$$\left(\overline{P_1P_2}\right)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

La distancia de P_1 a P_2 es:

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo: La distancia entre los puntos A (-2, 6) y B (4, -3) es:

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-(-2))^2 + (-3-6)^2} = \sqrt{36+81}$$
$$\overline{AB} = \sqrt{117} = 10{,}81$$

12.3 Representación gráfica de la línea recta

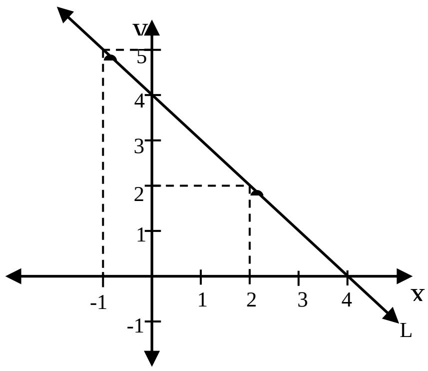
En una ecuación de la forma ax + by = c , donde a,b,c $\in$ R, representan una ecuación lineal o de primer grado con dos incógnitas, las soluciones son pares ordenados de la forma (x, y).
El par ordenado (x, y) pertenece a un punto del plano cartesiano.

Ejemplo: la ecuación L: x + y = 4

Tabla de valores

x	**y**	**(x, y)**
2	2	(2, 2)
1	3	(1, 3)
0	4	(0, 4)
-1	5	(-1, 5)

Gráfico



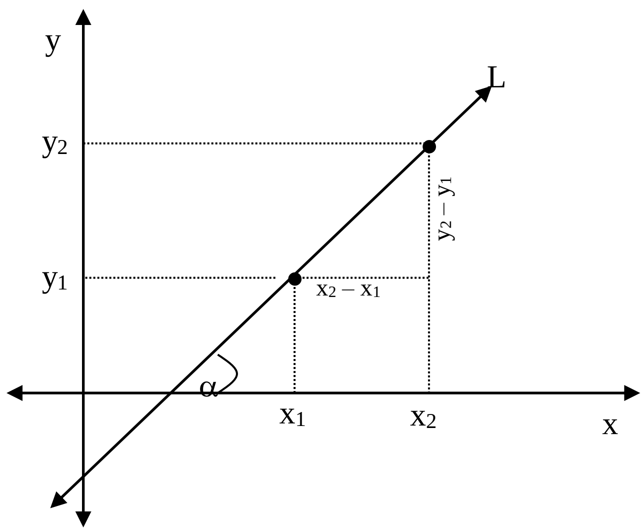
Notas:

- Toda ecuación lineal (de primer grado) con dos incógnitas le pertenece gráficamente una recta.
- Cada par ordenado de números (x, y) corresponde a las coordenadas de un punto que es el resultado de la ecuación dada, satisfaciendo la ecuación dada.
- Los pares ordenados de los puntos determinados en el eje cartesiano, pertenecen a la recta correspondiente.

12.4 Pendiente de un Recta

Pendiente "m" de una recta es el grado de inclinación "α" que tiene respecto del eje de las abscisas (x). El ángulo "α", la inclinación de la recta está dada por su tangente, que corresponde al lado opuesto dividido para el lado adyacente del mismo. se tiene:

$$taga = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



En geometría analítica se representa a la pendiente con "m", reemplazando las variaciones de ***x*** e ***y***, se tiene

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

La tangente a una curva cualquiera, representa la derivada de la función.

Nota:

- Es positiva la pendiente cuando la recta esta inclinada hacia la derecha.
- El valor de la pendiente es cero cuando la recta es horizontal.
- Es negativa la pendiente cuando la recta esta inclinada hacia la izquierda.

- Acorde el valor absoluto de la pendiente es mayor, la recta está más inclinada.

- La recta vertical no tiene pendiente.

Ejercicio Calcular la pendiente de las rectas determinadas por los puntos dados y hallar en ángulo de inclinación de la misma.

P_1 (3,4) P_2 (5,6)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-3}{5-3} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$
$$\tan g^{-1} 1.5 = 56{,}3^{0}$$

Ejercicios para resolver:

1. El cuadrilátero ABCD tiene como vértices los puntos A (1,2), B (5,2), C (3,4) y D (7,4). Demostrar que éste cuadrilátero es un paralelogramo de tres maneras diferentes, y luego calcular el perímetro.

2. Tres o más puntos son colineales cuando pertenecen a una misma línea recta; establecer, en cada caso, si los puntos son o no colineales. Y determinar la ecuación de recta con su respectivo gráfico de los siguientes puntos:
A (3; 4); B (5; 6); C (7; 8)

12.5 Ecuación de la línea recta

La expresión algebraica (función), que determina una recta se denomina como **ecuación de la línea recta.**
La expresión de la forma ax + by = c , donde a,b,c $\in$ R, se puede escribir en la forma:

$$y = mx + n,$$

Donde m es la pendiente o coeficiente de dirección y n es la intersección de la recta con el eje y, llamada como coeficiente de posición.

Por lo tanto, se puede afirmar que una recta está perfectamente definida si se conocen dos puntos de ella**.**

Ecuación de la recta conociendo la pendiente y un punto de ella.

Un tipo de ecuación lineal que se conozca punto-pendiente, donde determina la pendiente y el punto en el plano cartesiano.

La pendiente de una recta es: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$**,** teniendo en cuenta esta definición y que la recta pasa por un punto se tiene: $\frac{y - y_1}{x - y_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ que es la ecuación de una recta.

Sustituyendo ambas fórmulas en una sola se obtiene:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

<u>Ejemplo:</u>

Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (5, -4) y tiene pendiente -3

El punto dado es A (5,-4) con x = 5 e y = -4 , el valor de la pendiente es m=-3

Reemplazando en la fórmula de ecuación de la recta $y - y_1 = m(x - x_1)$ y se tiene

$$y - (-4) = -3(x - 5)$$
$$y + 4 = -3x + 15$$
$$y + 3x = 11$$

aplicando la propiedad distributiva se tiene:

Para obtener la ecuación general igualar a cero y reducir términos semejantes:

$$y + 3x - 11 = 0$$

Pendiente de una recta dada su ecuación:

La ecuación de la recta $Ax + By + C = 0$, la pendiente es igual a $m = \frac{-A}{B}$

Ejercicios

1.Determinar la ecuación de la recta que: (en todos los casos graficar)

- Pasa por el punto P (-1, 4) y cuya pendiente es -3

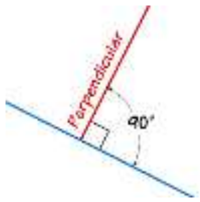
- Pasa por los puntos P (-2, 3) y R (3, 5)

- Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos M (-1; -3) y A (-4; 5).

- Hallar las ecuaciones de las rectas a las que pertenecen los lados del triángulo de vértices A (2; 2), B (6; 8) y C (4; -4)

12.6 Rectas Paralelas y Perpendiculares

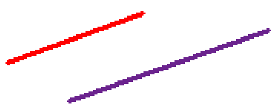
Rectas Perpendiculares: Rectas perpendiculares, son dos o más rectas que se intersectan formando un ángulo de 90.



Rectas Paralelas: Dos rectas son paralelas cuando están a una misma distancia (se llaman "equidistantes"), y nunca se crucen. (También apuntan en la misma dirección).

Recordar:

Siempre la misma distancia y no se encuentran nunca.



En Geometría Analítica dos rectas son perpendiculares cuando las pendientes son recíprocas y de signos contrarios.

Ejercicios

1. Demostrar si las siguientes rectas son paralelas, perpendiculares o se cortan simplemente.

a) $2x - y - 4 = 0$; $y - 2x - 7 = 0$
b) $2x + 3y = 18$; $-x + 3y - 15 = 0$
c) $x - 2y - 6 = 0$; $y = 3x - 5$

2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (-2,3) y es paralela a la recta -8x + 3y- 4 = 0

3. Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (-4,2) y es paralela a la recta que pasa por los puntos (-4,-3) y (-2,3).

4. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el vértice A del triángulo de vértices A (3; 3), B (4; -5) y C (7; 2) y perpendicular al lado opuesto de dicho vértice.

5. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el origen del sistema de ejes coordenados y que tiene por pendiente 3

6. Sacar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $2x + y + 1 = 0$; $x - 2y + 1 = 0$ y es paralela a la recta $4x - 3y - 7 = 0$

7. Los lados de un cuadrilátero están sobre las rectas $x + y - 2 = 0$; $x - y + 6 = 0$; $2x - y + 3 = 0$; $x - 3y + 2 = 0$. Hallar las ecuaciones que contienen a las diagonales

8. Los vértices de un triángulo son A (-5; -4), B (7; 2) y C (5; 12). Calcular las ecuaciones de las medianas.

9.Los puntos A (-2, 4) y B (4, -4), son vértices de un triángulo isósceles ABC que tiene su vértice C en la recta 3x - 5y + 4 = 0 siendo AC y BC los lados iguales. Calcular las coordenadas del vértice C.

10. La ecuación de la recta p es $3x+ny-7=0$ pasa por el punto A(4 ; 3) y es paralela a la recta B cuya ecuación es $mx+2y-13=0$

11.Dado el triángulo ABC, de coordenadas A (1; 1), B (5; 1) y C (5; 5); calcular la ecuación de la mediana que pasa por el vértice C.

12. En un paralelogramo se conoce un vértice, A (9; 0), y el punto de corte de las dos diagonales, Q (7; 3). Se sabe que otro vértice se encuentra en el origen de coordenadas. Calcular: a) los otros vértices b) las ecuaciones de las diagonales c) la longitud de las diagonales.

13. Hallar las coordenadas de los puntos que distan 13 unidades del punto P (2; 5) y 7 unidades del eje Y.

14.Que coordenadas tiene el punto A que equidista de B (0; 7) y de C (5; 2)

15. Hallar la ecuación de la recta que pasa por P (4/3; -8) y de pendiente cero.

16. Hallar la ecuación de la recta que tiene pendiente igual a -4 y ordenada al origen igual a -1/3

17. Qué coordenadas tiene el punto del eje Y que equidista de A (6; 6) y de B (5; 3) que tipo de triángulo forman estos tres puntos.

18 En un paralelogramo ABCD se conoce A (2; 4), B (6; 2), C (-3; 0). Hallar las coordenadas del vértice D.

GLOSARIO DE EJERCICIOS

En los ejercicios, efectuar las operaciones indicadas. Escribir todas las respuestas en términos de exponentes positivos.

1 $\dfrac{a^2y^3}{a^5y^8}$

2 $\dfrac{a^3p^6y^{43}}{a^6p^5y}$

3 $\dfrac{p^3q^4r^2}{p^5r^3}$

4 $\left(pr^3\right)^{-2}$

5 $a^2p^3\left(-a^2p^3\right)^2$

Simplificar cada expresión algebraica.

6 y^2-6y^2+5y

7 $\left(2a^2+4b\right)+\left(3b+5a\right)$

8 $5\left(x^2-y\right)-2\left(y+x^2\right)$

9 $2(x+y+z)-7(x+y-z)+3(-x-y+z)$

10 $3(x+y-z)-5(3x+2y-z)-3(x-y+4z)$

11 $3a-3\{5[a+2(4a+b)-b]+a\}-a$

12 $8x-4\{-[x+3(x-y)-y]+2x\}-2y$

13 $(2a+6b)-(2a-6b)$

14 $5(a+b)+2(b+a)$

En los siguientes ejercicios, efectuar la división indicada.

15 $2x^2+3x-2$ entre $x+2$

16 $9y^3-16y+8$ entre $3y^2+2y-3$

22 $4x^3-6x+3$ entre x^2+2x-1

17 $4x^3 - 3x + 4$ entre $2x - 1$

18 $24x^2 - 4x^4 + 12x^5 - 12 - 14x^3 + 8x$ entre $4x^2 - 5 + x$

19 $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$ entre $2a - 2b$

20 $a^2 - 3ab - 4b^2 + 3a - 13b - 8$ entre $a - 3b - 1$

21 $x^7 - x^5 + 2x^2 - 1$ entre $x^3 - x + 1$

En los ejercicios, resolver las ecuaciones.

23 $3(x+5) = 3x - 4$

32 $\dfrac{4(a-3)}{3} = \dfrac{3(a+2)}{5}$

24 Resolver $3(by - c) = 2\left(\dfrac{y}{2} - c\right)$ para y

25 $\dfrac{2}{x+1} - \dfrac{3}{x-1} = 0$

26 $\dfrac{3}{3x} = \dfrac{1}{2x+6}$

27 $\dfrac{2x+1}{2x-1} = \dfrac{x-1}{x-3}$

28 $\dfrac{3x+4}{2x+5} = \dfrac{6x+5}{5x+2}$

29 Resolver $\dfrac{6b-5a}{4} + \dfrac{5a+b}{3} = \dfrac{5(a+2b)}{5} + 5$ para a

30 Resolver $\dfrac{4r+t}{5t} - \dfrac{r+6t}{3t} = \dfrac{3(r-4)}{15t} + 2$ para r

31 Resolver $\dfrac{3p+2x}{3y} - \dfrac{5p-3x}{4y} = \dfrac{x-2p}{2y} + \dfrac{3x+p}{7y}$ para x

En el ejercicio, emplear el método de sustitución para resolver el sistema de ecuaciones.

33 $\begin{cases} 3x+4y=4 \\ 6x+4y=15 \end{cases}$

En el ejercicio emplear el método de la suma para resolver el sistema de ecuaciones.

34 $\begin{cases} 4x-3y=5 \\ 5x+y=9 \end{cases}$

En los ejercicios, utilizar el método de la sustitución para resolver cada uno de los sistemas de ecuaciones.

35 $\begin{cases} 3x+y+z=17 \\ 2x-y+2z=11 \\ 6x+y-2z=1 \end{cases}$

36 $\begin{cases} 3x-y-z=-8 \\ 2x+y-z=-9 \\ 2x-y+2z=7 \end{cases}$

En el ejercicio, utilizar el método que más le convenga.

37 $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x-3y-4z=-1 \\ 3x+4y-5z=6 \end{cases}$

Factorizar completamente las expresiones de los ejercicios

38 $4ax+7ax^2-3ax$

39 $6ap^2+3a^2pq+9apq^2$

40 $9a^4-b^2$

41 $9x^4-225y^4$

42 $6by-12b^2y+7by^2$

43 $10p^2r^2-8p^3r+24pr^2$

44 $9a^2-64b^2$

45 $49a^5-100ab^8$

Factorizar completamente cada uno de los siguientes trinomios.

46 $x^2-14y+33$

50 $m^2+22m+121$

47 $6a^2 - 19a + 3$

48 $2y^4 - 9y^2 + 7$

49 $27n^3 + 125a^6$

51 $49x^4 - 105x^3 + 14x^2$

52 $6x^9 + 15x^5e^2 + 6xe^4$

Reducir cada fracción a su mínima expresión.

53 $\dfrac{4r^2 + 12r^3}{8r + 12r^2}$

54 $\dfrac{t^2 + 4t + 3}{t^2 + 7t + 12}$

55 $\dfrac{6y^3 + 6y^2 + y}{6y^2 - 3y - 3}$

56 $\dfrac{m^3 - n^3}{n^2 - m^2}$

57 $\dfrac{r - s}{r^2 + s^2}$

58 $\dfrac{y^2 - 16}{y^2 + 8y + 16}$

59 $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x - 14}$

60 $\dfrac{m^3y^6 - m^3x^6}{2m^3y^4 - 2m^4y^3}$

61 $\dfrac{a^2 - b^2}{a + b}$

En los ejercicios, aplicar el método más conveniente para simplificar cada una de las fracciones complejas dadas.

62 $\dfrac{1 + \frac{4}{x}}{1 - \frac{3}{x}}$

63 $\dfrac{\frac{x}{x+y} - \frac{y}{y-x}}{\frac{y}{x+y} + \frac{x}{x-y}}$

64 $\dfrac{1 + \frac{2}{x}}{x + \frac{3}{x}}$

66 $\dfrac{x^2 - 36}{\frac{1}{x} - \frac{1}{6}}$

67 $\dfrac{x + 3 - \frac{14}{x+3}}{x - 6 + \frac{22}{x+6}}$

68 $\dfrac{a^2 - 49}{\frac{1}{5} - \frac{1}{a}}$

65 $\dfrac{\dfrac{2x}{x-y}-\dfrac{3y}{x+y}}{\dfrac{2}{x-y}+\dfrac{3}{x+y}}$

69 $\dfrac{t-5+\dfrac{30}{t-5}}{t+3+\dfrac{5}{t-3}}$

En los ejercicios, resolver las ecuaciones cuadráticas por factorización.

70 $(5x+2)^2=81$

71 $(x+2)^3=x^3+1385$

72 $\dfrac{11}{x-1}+\dfrac{4}{x-2}=\dfrac{7}{3}$

73 $\dfrac{2x}{x+1}+\dfrac{5}{x}=\dfrac{12}{5}$

74 $\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{x+2}{3x}$

75 $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{6}$

76 $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{4}{x+2}=\dfrac{1}{10}$

77 $\dfrac{4x}{x-1}-\dfrac{5x}{x+2}=3.4$

En los ejercicios, aplicar la fórmula cuadrática para determinar las raíces de cada ecuación

78 $2x^2+\sqrt{2x}-7=0$

79 $\dfrac{2x-3}{5}=3x^2$

80 $\dfrac{5}{x-1}+2=\dfrac{-3}{x+1}$

81 $3x^2-\sqrt{21x}+6=0$

82 $\dfrac{2x-5}{5}=5x^2$

83 $\dfrac{2x}{x+2}+5x=\dfrac{3x^2-1}{x+1}$

Escribir las expresiones dadas en su forma más simple, en la que aparezcan sólo exponentes positivos.

84 $\dfrac{\left(21x^{-6}y^{3}\right)^{-1/3}}{\left(16x^{4}y^{12}\right)^{-1/4}}$

85 $\left(\dfrac{x^3}{y^2}\right)^{-1/5}\left(\dfrac{y^3}{x^6}\right)^{1/3}$

88 $\dfrac{\left(28x^{6}y^{-8}\right)^{-5/6}}{\left(3x^{4}y^{2}\right)^{-3/2}}$

89 $\left(\dfrac{a^2x^3}{b^5y}\right)^{-2/3}\left(\dfrac{axy^{-2}}{b}\right)^{3/5}$

86 $\left(\frac{2x^3}{t^5}\right)^{-1/2}\left(\frac{4t^2}{3x^5}\right)^{-1/3}$

87 $\frac{\left(8x^4y^{-6}\right)^{-3/2}}{\left(7x^{-6}y^3\right)^{-2/3}}$

90 $\left(\frac{81a^6}{27b^3}\right)^{-2/3}\left(\frac{8b}{6a^2}\right)^{-1/2}$

91 $\frac{\left(64x^5y^{-8}z\right)^{-3/4}}{\left(25xy^{-3}z^2\right)^{-5/3}}$

Aplicar las reglas de los radicales para escribir cada uno de los ejercicios en su forma radical más simple.

92 $\sqrt[4]{\frac{25a^3b^2}{16c^4b^6}}$

93 $\sqrt{x^2-2xy+y^2}$

94 $\sqrt{\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^2}}$

95 $\sqrt[3]{\sqrt[4]{28x^8y^3}}$

96 $\sqrt{m^2+2mn+n^2}$

97 $\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b}}$

98 $\sqrt[5]{\sqrt[76]{125x^3y^5}}$

Resolver las ecuaciones con radicales. Comprobar todas las raíces.

99 $\sqrt{x+4}=6$

100 $\sqrt{x^2+24}=2x-6$

101 $(r+9)^{1/4}=7$

102 $(x-1)^{3/2}=27$

103 $\sqrt{4x+3}-\sqrt{x-4}=8$

104 $\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}=\sqrt{\frac{10}{x+1}}$

105 $\sqrt{x-25}=4$

106 $\sqrt{x^2+12}=x-3$

107 $\left(\frac{x}{3}+1\right)^{1/2}=4$

108 $\sqrt{3x+1}=\sqrt{5x-4}$

109 $\sqrt{\frac{2}{5x}}=\sqrt{\frac{2x}{3x-1}}$

Graficar los sistemas de ecuaciones y resolver algebraicamente cada sistema para x y y. Asegúrese de incluir las raíces reales y las complejas.

110 $\begin{cases} 3x-4y=5 \\ x^2-4y^2=45 \end{cases}$

111 $\begin{cases} x^2+y^2=7 \\ y^2=6x \end{cases}$

112 $\begin{cases} xy=5 \\ 3x^2-2y^2=18 \end{cases}$

113 $\begin{cases} 4x-7y=5 \\ x^2-y^2=32 \end{cases}$

114 $\begin{cases} x^2-y^2+6=0 \\ y^2=5x \end{cases}$

115 $\begin{cases} y=x^2-5 \\ x^2+2y^2+5y-8=0 \end{cases}$

Resolver algebraicamente y graficar las siguientes desigualdades.

116 $\dfrac{2x-2}{5} \leq \dfrac{4}{7}$

117 $\dfrac{2x+5}{8} > \dfrac{2x-3}{2}$

118 $|3x+4| > 8$

119 $3x-5 \leq 12 < 8x+1$

120 $\dfrac{3x+1}{4} \geq \dfrac{5}{6}$

121 $|3x+1| < 6$

122 $-7 \leq 3x+5 < 26$

Resolver las desigualdades.

123 $3x^2+5x+2<0$

124 $(x+2)(x-3)(x+4)<0$

125 $(5x+3)(2x-5)(x+4)>0$

126 $x^2+4x+2>0$

130 $5x^2-x \leq 4$

131 $(2x-1)(3x+5)(x-3) \leq 0$

132 $(x-2)^2(x+4)<0$

133 $\dfrac{(x-3)(2x-5)}{x+6}<0$

127 $\frac{(x+3)(x-4)}{x-2} \geq 0$

128 $\frac{(x+2)(x-4)}{x-3} \geq 0$

129 $\left|2x^2+5x+4\right| \leq 4$

134 $\frac{(x+5)(x+7)}{(x+1)(x-3)} > 0$

135 $\frac{x^2+x+4}{x+3} < 0$

136 $\left|x^2-4x+3\right| > 7$

Resolver los siguientes problemas

1.- Deducir un número sabiendo que el doble y el triple de dicho número suman 60.

2.- Al restar 9 a un número se reduce a su tercera parte. Calcular.

3.- Calcular un número cuya tercera parte, sumada con su quinta parte nos de 64.

4.- Determinar los números, donde la suma de tres números consecutivos es 51.

5.- Calcular un número cuya mitad es 40 unidades menor que su triple.

6.- Si al dinero que tengo le aumento su cuarta parte además 10 dólares, tendría 120 dólares. Calcular el dinero que tengo.

7.- La suma del doble de la edad de Marco más 5 años es igual a 45. Calcular la edad de Marco.,

8.-Si una madre tiene 30 años y su hijo 5. Calcular cuántos años deben transcurrir para que la edad de la madre sea el triple de la del hijo.

9.-Rosita tiene 17 años, su hermano Antonio 15, y su padre 42 años. Calcular cuántos años han de pasar para que la edad del padre sea la suma de las edades de los hijos.

10.- Un hijo tiene 25 años menos que su padre y éste tiene cinco veces la edad del hijo. Calcular la edad que tiene cada uno.

11.- Un hijo tiene 26 años menos que su padre. Dentro de diez años, la edad del padre será el doble que la del hijo. Calcular la edad de cada uno.

12.- Rosa tiene el triple de la edad de María. Dentro de 5 años Rosa tendrá el doble de la edad de María. Calcular las edades de cada una.

13.- Luis tiene hoy 14 años menos que Manuel. Dentro de 5 años, Luis tendrá el triple de la edad de Manuel. Calcular las edades de Luis y Manuel.

14.- Determinar las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su base es cuatro veces su altura y que su perímetro es 120 metros.

15.- En una bodega hay dos veces más microondas que televisores y cinco veces más lavadoras que microondas. Si en total hay 169 electrodomésticos, hallar cuántos hay de cada clase.

17.- En un rancho hay pollos, ovejas y cerdos. El número de pollos es doble que el de ovejas y el de cerdos es el triple de la suma de los pollos y ovejas más 80. Calcular el número de animales de cada clase si el número total es 1148.

18 Una madre reparte 100 Dólares entre sus tres hijos, de manera que el mediano recibe 10 dólares más que el pequeño, y el mayor 20 dólares más que el mediano. Calcular cuánto recibe cada hijo.

19.- En un bosque de Cerro Blanco hay tres veces más Guayacanes que Sauces, y el doble de éstos que Ceibos. También hay 90 Samanes. En total, el bosque tiene 639 árboles y arbusto. Calcular cuántos hay de cada especie.

20 Tres socios han de repartirse 1500000 dólares. Determinar cuánto le corresponde a cada uno si al primero ha de tener dos veces más que el segundo, y éste tres veces más que el tercero.

21 Por un videojuego, un cómic y un helado, Andrés ha pagado 30 dólares. El videojuego es cinco veces más caro que el cómic, y éste cuesta el doble que el helado. ¿Cuál es el precio de cada artículo?

22 Tres niños reúnen su dinero y comprueban que tienen 4 dólares entre los tres. Calcular cuánto tenía cada uno sabiendo que el primero aporta 0,25 dólares más que el segundo y éste el doble que el tercero.

23. un barril lleno de agua se saca primer la mitad del contenido y después un quinto del resto. Si en el barril quedan 300 litro, ¿cuál es la capacidad del barril?

24- Luisa pasó dos quintos de los días que estuvo de vacaciones en Quito. Los cinco sextos de los que le quedaban los pasó en Salinas y los últimos 6 días restantes, en casa preparando la vuelta al colegio. Calcular cuántos días ha estado de vacaciones Luisa.

25- Un almacén está lleno de vino. Se extrae la mitad del contenido y luego la tercera parte del resto, quedando 1100 litros. Hallar la capacidad total del almacén.

UNIDAD 13. FUNCIONES

Aplicaciones de las funciones en la vida diaria

Uno de los temas de mayor importancia en las matemáticas, es el concepto de funciones, ya que se puede aplicar en la vida cotidiana, y determinar relaciones existentes entre las diferentes magnitudes Matemáticas, Físicas, en Economía…y calcular el valor de cada una de ellas en función de otras de las que dependan.

En un fenómeno físico se determina que un valor(cantidad) dependerá de otra.
Por ejemplo:

- El peso de una persona dependerá de la edad.
- Las condiciones ambientales de un país dependerá de las estaciones del año.
- El costo de enviar una encomienda a un destino específico, dependerá del lugar que se envía y por lo tanto el peso del mismo

Cuando se describe la dependencia de una sobra otra, se expresa como el término de “función”. Es decir, se expresa lo siguiente.

- El costo de producción es función del número de unidades producidas.
- La temperatura es una función del medio ambiente.
- El precio de un artículo en función de la demanda del cliente.

La aplicación de las funciones en la vida real, se da siempre y muchas veces no se da cuenta, tales como cuando se dice “esto depende de………” se cesta hablando de función, cuando a un niño se la da un regalo depende como se ha comportado, la variable independiente es como se ha portado, porque no depende de nada, y la variable dependiente será el regalo, porque dependerá de cómo se comportó.

Cuando se analiza y desea obtener el área A de un circulo va depender de su radio r y se escribe con la formula $A = \pi.r^2$. Cuando no se puede determinar una función por medio de una formula o análisis matemático, se puede describir mediante una gráfica. Ejemplo, cuando se abre la llave del agua caliente, la temperatura dependerá del tiempo que el agua haya estado corriendo. Así, se puede determinar que la temperatura del agua de la llave es una función del tiempo.

En cualquiera de las áreas de la ciencia existe la relación de diferentes magnitudes, temperatura- presión, masa- velocidad, etc., esto quiere decir que a partir de los valores de ciertas magnitudes se obtienen otras por medio de fórmulas u otro método determinado, indicando que existen variables dependientes e independientes dentro de una función.

13.1 Definición de función

Una función matemática, es la concordancia que existe entre dos conjuntos, por medio del cual a cada elemento del primer conjunto se le establece un único elemento del segundo conjunto o ninguno. Al conjunto inicial se le nombra dominio y al conjunto final o llegada se denomina codominio.

Por ejemplo, dado un **conjunto A**, y un **conjunto B**, una función es la asociación, que se produce cuando cada elemento del conjunto A (Dominio), se le asigna un único elemento del conjunto B (codominio).

Al elemento Dominio, se le denomina como variable independiente, y al codominio se le asigna como variable dependiente.

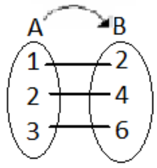
Así, en un concurso de talentos, donde siete especialistas, conforman el jurado. Las reglas determinan que cada miembro del jurado debe elegir un ganador, sin que exista la posibilidad de votar en blanco, ni de elegir a más de uno. En la instancia final del concurso existen dos finalistas; con esta información podemos indicar que existe una función, que se puede determinar como "elección", la cual asigna a cada miembro del jurado el finalista que seleccione. El conjunto inicial o Dominio, está conformado por siete elementos (cada uno de los miembros del jurado), mientras que el conjunto final o codominio presenta dos elementos (finalistas). La función "elección" hace que cada uno de los jurados (Dominio), les corresponda un único participante del concurso (codominio)
Se determinan funciones para los conjuntos A y B sean conjuntos de números reales. El símbolo f(x) se lee "f de x" o "f en x" y se determina el valor de f en x, o el perfil de x bajo f. Al conjunto de A se nombra dominio de la función. El rango de f es el conjunto de los valores posibles de f(x) cuando x varía a través del dominio, es decir

Rango de f = $\{f(x) | x \in A\}$

La forma de representar un número arbitrario en el dominio de una función f se llama variable independiente. El símbolo que constituye un número en el rango de f se llama variable dependiente. Se escribe y= f(x), entonces (x) es la variable independiente y (y) es la variable dependiente.

Se debe reflexionar que una función es una máquina. Si x está en el dominio de la función f, cuando se introduce x en la máquina, se acepta como una entrada y la máquina produce una salida f(x) de acuerdo con la regla de la función. Así, se puede razonar al dominio como el conjunto de las entradas posibles y al rango como el conjunto de las salidas posibles.

También se puede determinar a una función mediante un diagrama de flechas. Cada flecha relaciona un elemento de A con un elemento de B. La flecha indica de f(x) se relaciona con x, f(a) se relaciona con a, etcétera



13.2 Representación de una función

Existe diferentes maneras de simbolizar una función, de las cuales las más importantes son: Cuatro formas de representar una función

Para ayudar a entender lo que es una función, se han empleado diagramas de máquina y flechas. Se puede describir una función específica en las cuatro formas siguientes:

- Oral (mediante una representación en palabras)

$U(t)$ Es la “Utilidad de una empresa en el instante t”
Relación de la Utilidad (U) y el tiempo (t)

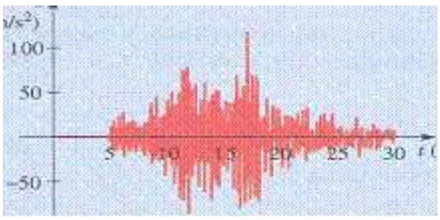
- Matemáticamente (mediante una fórmula clara)

Por medio de una fórmula

$$A = \frac{b*h}{2}$$

Área de un triángulo

- Sensorial (por medio de una gráfica)



- Numérica (por medio de una tabla de valores)

U	C (dólares)
$0 < w \leq 2$	0.40
$1 < w \leq 3$	0.70

$2 < w \leq 4$	0.93
$3 < w \leq 5$	1.16
$4 < w \leq 6$	1.30

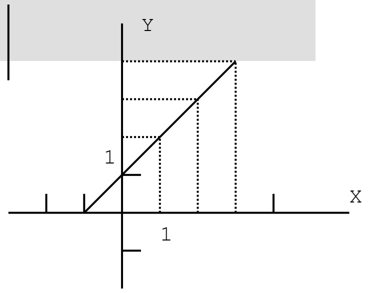
- Gráfica (coordenadas Cartesianas)

Los ejes de las coordenadas cartesianas, son el eje horizontal “x” abscisa, y el eje vertical “y” ordenada. El punto de corte de los ejes, se denomina origen de las coordenadas.

Las funciones se representan mediante sus gráficas cartesianas, donde los puntos están determinados por pares de valores (x, y)

Ejemplo: y = x + 1

x	-1	0	1	2
y	0	1	2	3



13.3 Dominio y rango de una función

Dominio de una función

Dominio de una función es el conjunto de las entradas para la función. También se puede indicar que el dominio, es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente.

Se puede expresar de forma explícita. Por ejemplo,
Si se escribe

$$f(x) = x^2, \qquad 0 \leq x \geq 6$$

Por lo tanto el dominio es el conjunto de números reales para los cuales $0 \leq x \geq 6$. Si en una función se determina por una expresión algebraica y el dominio no se enuncia de manera clara, por convención el dominio de la función es el domino de la expresión algebraica, es decir, el conjunto de los números reales para los que la expresión se define como un número real.

Por ejemplo, considere las funciones.

$f(x) = \dfrac{1}{x-6}$ $\qquad\qquad\qquad$ $h(x) = \sqrt{x}$

La función f no está definida en $x = 6$, así que su dominio es $\{x | x \neq 6\}$. La función h no está definida para x negativa, así que su dominio es $\{x | x \neq 0\}$

Elaboración de información de la gráfica de una función

Los datos de una función se representan por la cota de su gráfica sobre el eje x.
Así el valor de una función se puede leer de su gráfica.

<u>Ejemplo</u>

Determinar los valores de una función a partir de una gráfica

La función T graficada en la figura de la temperatura entre el mediodía y las 6 p.m. en cierta estación meteorológica.

A) Determinar la temperatura T (1), T (3) , T (4) y T(5)
B) ¿Qué es más grande, T (3) o T (5)?

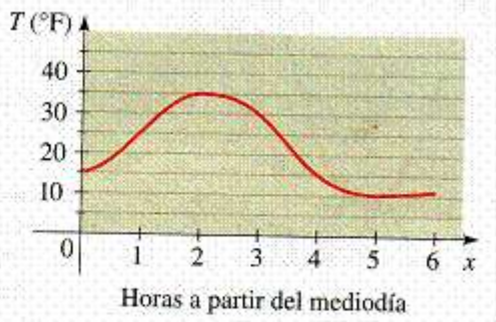


Figura 5
Función de temperatura

Solución:

A) T (1) es la temperatura a la 1 p.m. Está representada por la cota de la gráfica sobre el eje x en x=1. Por lo tanto, T (1) =25.

De igual manera: T (3) = 30, T (4) = 15 y T (5) = 10

B) Analizando la gráfica es mayor T (3) = 30 que T (5).

Gráficamente se puede determinar el dominio y recorrido de una función, se indicará que es dominio el campo que abarca la función en el eje “x” (abscisas) y Recorrido o Rango lo abarca en eje “y” u ordenadas.

Ejemplo.

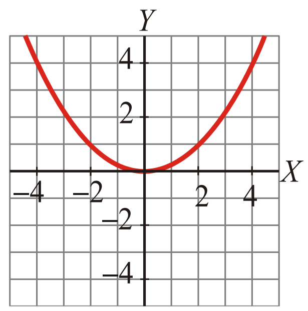
Hallar el dominio y el recorrido de una gráfica

a) Usar una calculadora de traficación para trazar la gráfica de $f(x)=0{,}25x^2$.

b) Hallar el dominio y el rango de f

Solución:

a) La gráfica se muestra en la figura



b) De la gráfica de la figura se ve que el dominio es $[-\alpha,1)u(1,\alpha]$ y el rango es $(0,\alpha\,|$

13.4 Tipos de funciones y aplicaciones

Función lineal

Una función es lineal, es una función polinómica de primer grado, que representada en el plano cartesiano es una línea recta.

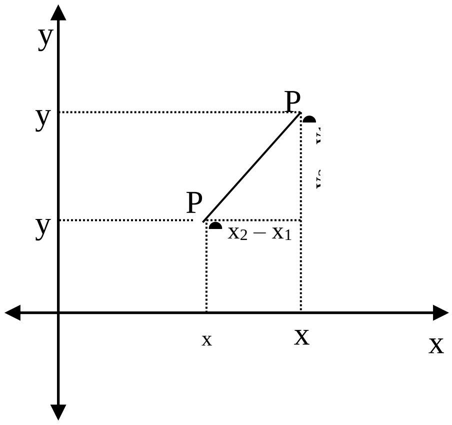
Si en grafico se tiene dos puntos P1 (x1, y1) y P2 (x2, y2) como se observa en gráfico, y se desea obtener la distancia entre los dos puntos, se aplica el teorema de Pitágoras:

$$(p_1p_2)^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$$
$$p_1p_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

Ejemplo

Determinar la distancia entre los puntos

A (4,-2) y B (-6,3)



$$AB = \sqrt{(-6-4)^2 + (3+2)^2}$$
$$AB = \sqrt{(-10)^2 + (5)^2} = \sqrt{125} = 11{,}18$$

Pendiente de una recta

La pendiente de una recta es la tangente del ángulo que forma la recta con respecto al eje "x" abscisas.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(\frac{cambiovertical}{cambiohorizontal}\right)$$

Utilizando el ejemplo anterior

$$m = \frac{3+2}{-6+4} = \frac{5}{-2} = -2{,}5 = -68{,}19^0$$

Cuando la pendiente:

Es cero:	recta horizontal
Pendiente indefinida:	recta vertical.
Pendiente positiva:	recta que sube de izquierda a derecha
Pendiente negativa:	recta que desciende de izquierda a derecha

Ecuaciones de Rectas

Si se conoce un punto y la pendiente de una recta, se puede obtener una recta cuya gráfica es una recta. Suponiendo la recta "M", tiene una pendiente "m" y pasan por los puntos (x_1, y_1) y si (x, y) es cualquier punto sobre "M", se obtiene la siguiente relación algebraica:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=m$$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

Se denomina: ecuación punto pendiente.

Existen otras formas de ecuaciones de líneas rectas

Forma punto pendiente	$y-y_1=m(x-x_1)$
Forma pendiente ordenada al origen	$y=mx+b$
Forma lineal general	$Ax+By+C=0$
Recta vertical	$x=a$
Recta horizontal	$y=b$

Dos rectas son paralelas cuando sus pendientes son iguales.

Dos rectas son perpendiculares, cuando la pendiente de una de ellas es la inversa negativa

Ejemplo Determinar la ecuación lineal general, de la recta que tiene las propiedades: pasa por (4,-2) y (-6,3)

Calcular la pendiente $m=\frac{3+2}{-6-4}=\frac{5}{-10}=\frac{-1}{2}$

Aplicar la fórmula punto pendiente

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y+4=\frac{-1}{2}(x-4)$$

$$2(y+4)=-(x-4)$$

$$2y+8=-x+4$$

$$x+2y+4=0$$

Ejemplo Determinar una ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas.

Pasa por (-5,4) y es perpendicular a la recta $2y=-x+1$

$$2y = -x + 1$$

$$y = \frac{-x+1}{2}$$

$$m = \frac{-1}{2}$$

Para que sea perpendicular la pendiente será: $m = 2$

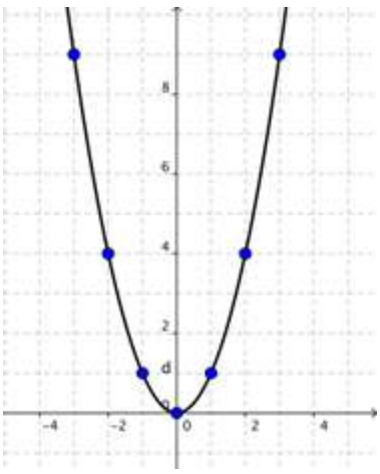
Aplicar al fórmula punto pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 4 = 2(x + 5)$$
$$y - 4 = 2x + 10$$
$$y = 2x + 14$$

Funciones cuadráticas

Se llama función cuadrática a la función matemática que se puede expresar como una ecuación que tenga la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$

Las funciones cuadráticas son útiles cuando se trabaja con áreas, y frecuentemente aparecen en problemas de movimiento que involucran aceleración y gravedad.



Máximos y mínimos en las funciones cuadráticas

El valor máximo o mínimo de una función es el valor más grande o más pequeño de la función en un momento dado. En una función que simboliza la Utilidad en una industria, se debe determinar el valor máximo; para una función que determina la cantidad de material en un proceso productivo, es importante conocer el valor mínimo.

Grafica de la función cuadrática

La "función cuadrática" es una función f de la forma
$f(x) = ax^2 + bx + c$
Donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

Cuando se toma a=1 y b=c=0, se logra determinar la función cuadrática simple $f(x) = x^2$ cuya gráfica es la parábola.
Toda función cuadrática es una parábola. Existe distintas formas de graficar, tales como:

Graficando con puntos.

Para graficar, se realiza una tabla de valores, donde se dan valores a la independientes y en base a esos valores resulta los valores de la variable dependiente, realizando en un plano cartesiano.

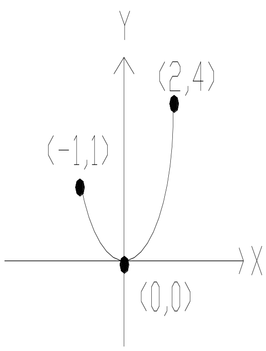
Para construir una gráfica de una función se puede seguir los siguientes pasos:

1. Alcanzar las coordenadas de unos cuantos puntos que satisfagan la ecuación (o fórmula) que define a la función. Mostrar estos puntos en una tabla de valores.

2. Colocar en el plano cartesiano los puntos de la tabla de valores.

3.Unir los puntos mediante una curva de trazo continuo.

<u>Ejemplo</u> Construir la gráfica de la función: $f(x) = x^2$

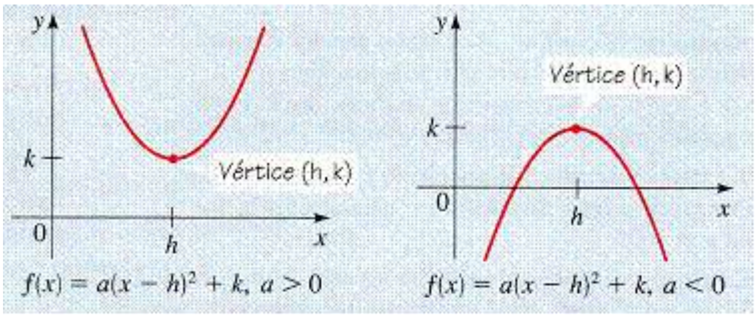


Forma estándar

La función cuadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ se puede formular en la forma estándar

$$f(x)=a(x-h)^2+k$$

En el gráfico de la función f, es una parábola con vértice (h,k);
La parábola se abre hacia arriba $a>0$
La parábola, se abre hacia abajo si $a<0$



<u>Ejemplo</u>

Convertir a función estándar, la siguiente función cuadrática:

$$f(x)=2x^2-12x+23$$

a) Expresar f en la formula estándar
b) Bosquejar la gráfica de f

a) Como el coeficiente de x^2 no es 1, se debe factorizar el coeficiente a partir de los términos relacionados con x antes de completar el cuadrado

$$\begin{aligned} f(x)&=2x^2-12x+23\\ &=2(x^2-6x)+23\\ &=2(x^2-6x+9)+23-2\times 9\\ &=2(x-3)^2+5 \end{aligned}$$

Se factoriza los dos términos en x. con el objetivo de obtener un trinomio cuadrado perfecto; se suma 9 dentro del paréntesis, y luego se resta 2*9 fuera del paréntesis.
Factorizando y simplificando, queda:
La forma estándar es $f(x)=2(x-3)^2+5$

La forma estándar muestra que la gráfica de f se consigue tomando la parábola $y = x^2$, trasladar 3 unidades a la derecha, prolongando por un factor de 2 y desplazando 5 unidades hacia arriba.

El vértice de la parábola está en (3, 5) y la parábola abre hacia arriba. La gráfica se bosqueja en la siguiente después de notar que el interfecto y es $f(0) = 23$

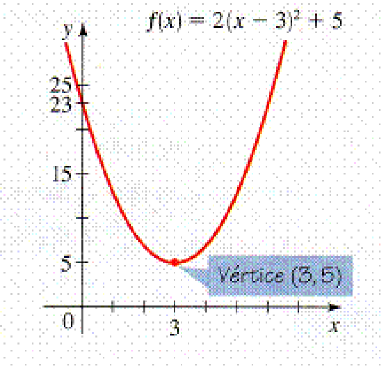
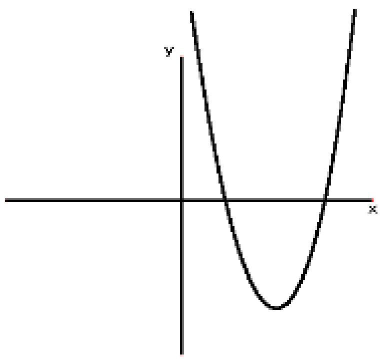


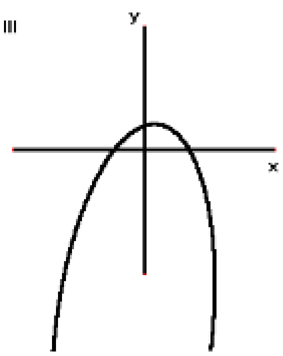
Figura 1

Valores máximos y mínimos de funciones cuadráticas

En una función cuadrática, existe un punto máximo cuando la curva pasa de creciente a decreciente.
Existe un punto mínimo, cundo la curva pasa de decreciente a creciente.
En una función cuadrática, es creciente cundo tiene vértice (m, n), tendrá un valor máximo, si el vértice se abre para abajo y tendrá un valor mínimo en el vértice si abre hacia arriba



Mínimo

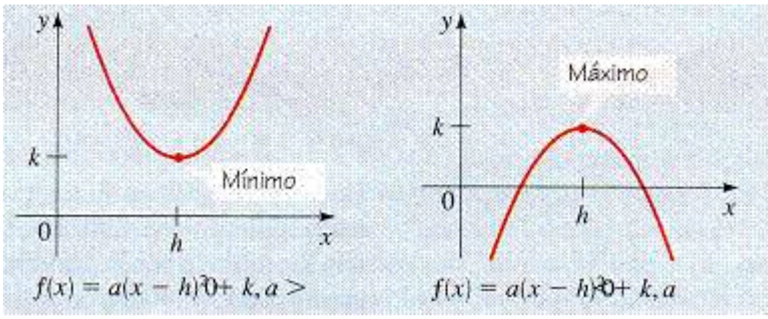


Máximo

Si f una función cuadrática con forma estándar $f(x) = a(x-h)^2 + k$. El valor máximo o mínimo de f sucede en x=h.

Si a>0, el valor mínimo de f es $f(h) = k$.

Si a<0, el valor máximo de f es $f(h)=k$.



Función racional (asíntotas verticales y horizontales)

Se dice que una función es racional, cuando tiene polinomios tanto en el numerador como el denominador.

La forma matemática para simbolizar, este tipo de funciones es:

$$f(x)=\left(a_n x^n+........+ax+a0\right)\left(b_m x^m+.......+bx+b0\right)$$

El grado n, es del numerador y m, grado del denominador. Como en el denominador tiene variables, el dominio de la función excluye los valores que le hacen indefinida.

La función racional tiene la forma $s(x)=\dfrac{A(x)}{B(x)}$

Tanto A y B deben se polinomios.

Asíntotas verticales Para determinar las asíntotas verticales de una función polinómicas, se debe seguir los siguientes pasos:

1.Calcular el dominio de la función.
2.Utilizar el límite, para los valores de x que no pertenecen al dominio: Si límite es infinito en estos valores, entonces existe una asíntota vertical.

$$Lim_{x\to\alpha} f(x)=\alpha$$

3. Para saber la tendencia de la función, se debe tomar en cuenta los límites laterales. De $\pm\alpha$
4.Son rectas paralelas al eje 0y. Se escribe x= el valor de la asíntota vertical.
5.Las funciones que pueden tener asíntotas verticales:

Funciones racionales: Indeterminación $\frac{K}{0}$

Funciones logarítmicas.
Función tangente.

Ejemplo Determinar asíntotas $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

Dominio: Dom. $F_{(x)}$ = R {1}
Límite en x=1

$$Lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0} = \alpha$$

Existe asíntota vertical en x=1

Se toma los límites laterales, para ver la tendencia de la función a la izquierda a la derecha.
Se sustituye los valores de x por la izquierda (0.99) y por la derecha 1,1
Solo interesa el signo que tome los números, de -∞ a +∞

$$Lim_{x \to 1-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{0{,}99+1}{0{,}99-1} = \frac{+}{-} = -\alpha$$

$$Lim_{x \to 1-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{0{,}99+1}{0{,}99-1} = \frac{+}{-} = \alpha$$

Asíntotas horizontales Para determinar las asíntotas horizontales de una función polinómicas, se debe seguir los siguientes pasos:

1.Calcular el límite de la función cuando x, tiende al infinito.
Si existe valor infinito, tiene asíntota horizontal.

$$Lim_{x \to \alpha} f(x) = b$$

El valor de valor de la asíntota será y=b

2. Son rectas paralelas al eje 0x, se escribe y= valor de la asíntota horizontal.
3.Las funciones racionales tiene asíntotas horizontales, en los siguientes casos:

$$\frac{M(x)}{N(x)} = \frac{\alpha}{\alpha}$$

-Cuando el numerador y denominador tienen el mismo grado.
-Cuando el grado del denominador es mayor que el grado del numerador.

4.Las funciones exponenciales tienen asíntotas horizontales en, y=0

Ejemplo

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

$$Lim_{x\to\alpha}\frac{x+1}{x-1}=\frac{\alpha}{\alpha}\Rightarrow Lim_{x\to\alpha}\frac{x+1}{x-1}=Lim_{x\to\alpha}\frac{x}{x}=1$$

Existe asíntota horizontal en y=1

Para determinar si la función tiende a uno por arriba o por abajo, se da un valor grande y pequeño al valor de x

$x=10\Rightarrow f(10)=\frac{10+1}{10-1}=\frac{11}{9}=1,22$ la función se acerca a uno por arriba de la asíntota cuando x→∞

Cuando x=-10 f (-10)= 0.81 la función se acerca a uno por abajo para x→-∞.

Asíntotas oblicuas Una función racional tiene asíntotas oblicuas, cuando el grado exponencial del numerador es mayor que el grado del denominador.

Cuando en una función existen asíntotas horizontales, no existe oblicuas.

Sea la función $y=mx+n\Rightarrow n\neq 0$

Se calcula primeramente la pendiente y la ordenada en el origen n

Pendiente m $m=\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)}{x}\right]$

Ordenada n $n=\lim_{x\to\alpha}\left[f(x)-mx\right]$

$\frac{R(x)}{S(x)}=\frac{\alpha}{\alpha}$ Resolverá la indeterminación

Existe otra manera de resolver dividiendo R(x) para S(x), donde el cociente es la ecuación de la asíntota

Ejemplo Determinar si existe asíntota vertical. en la función.

$$f(x)=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$$

El grado del numerador es mayor que el del denominador por lo tanto hay asíntota oblicua.

$$Lim_{x\to\alpha}\frac{x^2-3x+3}{x-1}=\alpha$$

Existe asíntota oblicua

Se calcula la pendiente

$$m=Lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\lim_{x\to\alpha}\frac{x^2-3x+3}{x(x-1)}=\frac{x^2-3x+3}{x^2-x}=1$$

La ordenada

$$n=Lim_{x\to\alpha}\left[f(x)-mx\right]=Lim_{x\to\alpha}\left(\frac{x^2-3x+3}{x-1}-x\right)=\frac{x^2-3x+3-x^2+x}{x-1}=\frac{-2x+3}{x-1}=-1$$

$$y=mx+n\Rightarrow y=x-1$$

13.5 Función irracional

Funciones irracionales son aquellas cuya expresión matemática f(x) presenta un radical:

$$f(x)=\sqrt[m]{h(x)}$$

Donde h(x) es una función polinómica o una función racional.
Si el radicando(m) es par, el radical se define por $h(x)\geq 0$, de tal manera que cuando se calcula el dominio de f(x) que contiene un radical, se debe imponer la condición anterior a la función f(x).

13.6 Función exponencial

La función exponencial es conocida como la función real donde se toma como base el número de Euler e^x, y es una constante cuyo valor aproximadamente es 2,718281………Esta función tiene como dominio el conjunto de números reales, y existe una particularidad donde su derivada e integral es la misma función.

La función exponencial se puede trasformar en logaritmos naturales, aplicando los conceptos básicos de los logaritmos.

$$y = e^x \Rightarrow x = Lny.$$

La “función exponencial con base a se define para todos los números reales x por

$$f(x) = a^x$$

Donde $a > o..y..a \neq 1$

Por la condición $a \neq 1$ la función $f(x) = 1^x = 1$ es una función constante.

Se debe seguir y cumplir los principios de las potencias.

<u>Ejemplo:</u> Evaluar las siguientes funciones exponenciales

Sea $f(x) = 4^x$ y evalúe lo siguiente

a) $f(3) = f(3) = 4^3 = 4*4*4 = 64$

b) $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 4^{\frac{-1}{3}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{1{,}5874} = 0{,}63011$

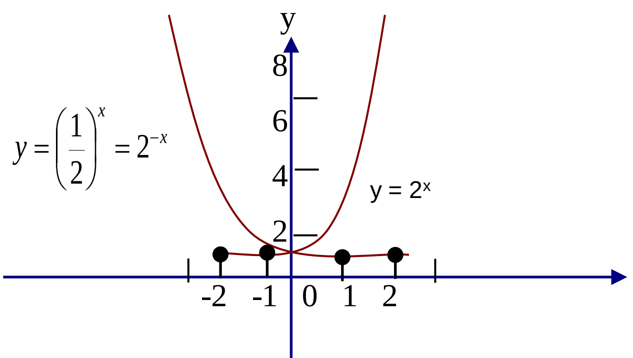
c) $f(\pi) = 4^{\Pi} = 77{,}8810$

d) $f(\sqrt{3}) = 4^{\sqrt{3}} = 4^{3^{\frac{1}{2}}} = 4^{1{,}7320} = 11{,}0348$

Gráfica de funciones exponenciales

Para graficar las funciones exponenciales al trazar los puntos. Se dan valores tomando en cuenta las condiciones t restricciones, se verá en la gráfica que cuando es mayor que uno crecerá y lo contrario, cuando es menor que uno la curva tiene una tendencia decreciente.

<u>Ejemplo :</u> Graficar la función $y = 2^x$ en las mismas coordenadas $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$



Si se grafica ambas funciones, la gráfica $y = 2^x$ crece $0 < a < 1$

Tiene mucho parecido a la función $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$, se determina que en ambos casos el eje x, es una asíntota horizontal que nunca tocan las gráficas.

13.7 Función logarítmica

Un función es logarítmica cuando es de la forma $y = Log_a b$ logaritmos de base 10, o la forma $y = Lnx$ logaritmos neperianos o naturales, se considera la inversa de potencia.

Cuando a es un número positivo con $a \neq 1$. La "función logarítmica con base a", expresa por "$\log_a$", se define

$f^{-1}(x) = y .... \Leftrightarrow .... f(y) = x$

Así, $\log_a x$ es el exponente al que se debe elevar la base a para dar x

Al relacionar la definición de logaritmos para intercambiar entre la forma logarítmica $\log_a x = y$ y la forma exponencial $a^y = x$, se observa que, en ambas formas, la base es la misma.

Se puede concluir que

1.Cualquier logaritmo de base 1, es cero $0 = Log_a 1 \Rightarrow a^0 = 1$

2. Todo logaritmo de un número que sea igual a la base es uno $\log_a a = 1 \Rightarrow a^1 = 1$

3.El logaritmo de una potencia cuya base es igual a la base del logaritmo es igual al exponente de la potencia: $\log_a a^m = m \Rightarrow a^m = a^m$

4.No existe logaritmo de cualquier base de números negativos.

5.El logaritmo de un numero M mayor que cero y menor que uno, será siempre negativo si la base del logaritmo es mayor que uno.

Por ejemplo $\log_3 \frac{1}{9} = -2 \Rightarrow 3^{-2} = \frac{1}{9}$

6.El logaritmo de un numero M mayor que cero y menor que uno, será siempre positivo si la base del logaritmo es menor que uno.

Por ejemplo, $\log_{1/3} 1/9 = 2$, ya que $(1/3)^2 = 1/9$

7.El logaritmo de un número mayor que uno, es positivo si tiene como base menor que uno

Por ejemplo $\log_3 9 = 2 \Rightarrow 3^2 = 9$

8.El logaritmo de un número mayor que uno, es negativo si la base es menor que uno.

Por ejemplo $\log_{\frac{1}{5}} 25 = -2 \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 25$

Ejemplo: Evaluar los logaritmos

a) $\log_{10} 1000 = 3$ porque $10^3 = 1000$

b) $\log_2 32 = 5$ porque $2^5 = 32$

c) $\log_{10} 0.1 = -1$ porque $10^{-1} = 0.1$

d) $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$ porque $16^{1/2} = 4$

Cuando se aplica la propiedad de la función inversa ha $f(x) = a^x$ y $f^{-1}(x) = \log_a x$, se obtiene.

$\log_a(a^x) = x \quad x \in \Re$

$a^{\log_a x} = x \quad x > 0$

Ejemplo Resolver aplicando las propiedades de los logaritmos

$\log_5 1 = 0$

$\log_5 5 = 1$

$\log_5 5^8 = 8$

$5^{\log_5 12} = 12$

Gráfica de función logarítmica

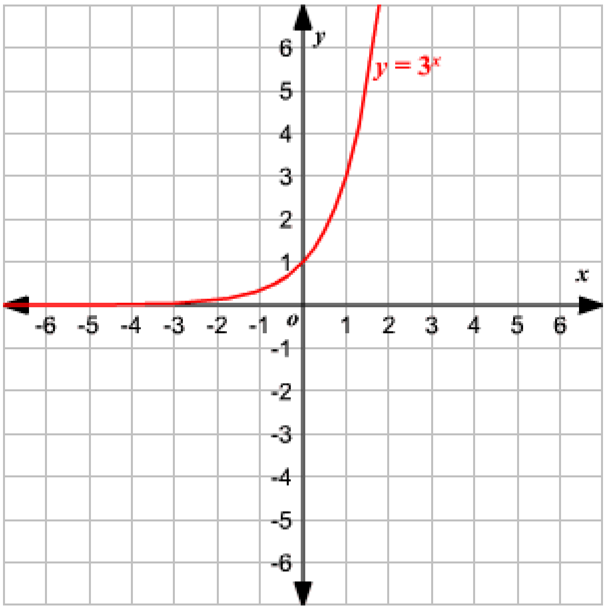
Cuando una función f uno a uno tiene dominio A y rango B, entonces la función inversa f^{-1} tiene dominio B y rango A. Porque que la función exponencial $f(x) = a^x$

con $a \neq 1$ tiene dominio $\Re$ y rango $(0,\infty)$, concluyendo que la función inversa, $f^{-1}(x) = \log_a x$ tiene dominio $(0,\infty)$ y rango $\Re$.

La gráfica de $f^{-1}(x) = \log_a x$ se obtendrá mostrando la gráfica de $f(x) = a^x$

Ejemplo Graficar la función $y = \log_3 x$

Considerar la función $y = 3^x$. Se puede graficarse como:



13.8 Operaciones con funciones

.

Sumas de funciones

Sean f, m, dos funciones reales, de variables reales en un intervalo. Se denomina suma de funciones a:

$$(f+m)(x) = f(x) + m(x)$$

Resta de funciones

De la misma manera que se definió la suma, se definirá la resta de funciones

$$(f-m)(x) = f(x) - m(x)$$

Producto de funciones

Sean f, m, dos funciones reales, de variables reales en un intervalo. Se denomina función producto de f y m, a la función definida

$$(f * m)(x) = f(x) * m(x)$$

Cociente de funciones

Sean f, m, dos funciones reales, de variables reales en un intervalo. Se denomina cociente de funciones de f y m, a la función definida por

$$\left(\frac{f}{m}\right)(x) = f(x) / m(x)$$

Conclusión

Cuando, si el dominio de f es A, y el dominio de m es B, se puede decir que el dominio d f+m es la intersección de estos dominios, es decir, $A \cap B$. Del mismo modo, se puede definir la "diferencia f y m, el "producto" f*m, y el "cociente" f/m de las funciones f y m.
Sus dominios son $A \cap B$, pero en el caso del cociente se debe recordar no dividir entre cero.

Ejemplo, Dada las funciones

$$f(x) = 5x + 2 \Rightarrow m(x) = 6x + 5$$

Resolver la suma indicada y calcular las imágenes de los números 3,-4, ¼

$$(f+m)(x) = f(x) + m(x) = 5x + 2 + 6x + 5 = 11x + 7$$
$$(f+m)(2) = 11(2) + 7 = 29$$
$$(f+m)(-4) = 11(-4) + 7 = -37$$
$$(f+m)(\frac{1}{4}) = 11\left(\frac{1}{4}\right) + 7 = \frac{11}{4} + 7 = \frac{11+28}{4} = \frac{39}{4}$$

Ejemplo, Dada las funciones y determinar la imagen de los números 1, 2/3,1/5

$$f(x) = \frac{x}{3} - 4 \Rightarrow m(x) = 5x - 3$$

Resolver la división indicada

$$\left(\frac{f}{m}\right)(x) = f(x)/m(x) = \frac{\frac{x}{3}-4}{5x-3} = \frac{\frac{x-12}{3}}{5x-3} = \frac{x-12}{3} * \frac{1}{5x-3} = \frac{x-12}{15x-9}$$

$$\left(\frac{f}{m}\right)(1) = \frac{1-12}{15(1)-9} = \frac{-11}{6}$$

$$\left(\frac{f}{m}\right)(2/3) = \frac{2/3-12}{15(2/3)-9} = \frac{\frac{2-36}{3}}{10-9} = \frac{\frac{-34}{3}}{1} = \frac{-34}{3}$$.

$$\left(\frac{f}{m}\right)(1/5) = \frac{1/5-12}{15(1/5)-9} = \frac{\frac{1-60}{5}}{3-9} = \frac{\frac{-59}{5}}{-6} = \frac{-59}{5} * \frac{1}{-6} = \frac{-59}{-30}$$

Ejemplo Combinaciones de funciones y sus dominios

Sean $f(x) = \frac{1}{x-2} y g(x) = \sqrt{x}$

a) Encontrar las funciones $f+g,\ f-g,\ fg..y..f/g$ y sus dominios

b) Encontrar $(f+g)(4), (f-g)(4), (fg)(4) y \left(f/g\right)(4)$

a) El dominio de f es $\{x|x \neq 2\}$ y el dominio de g es $\{x|x \geq 0\}$. La intersección de los dominios de f y g es
$\{x|x \geq 0...y...x \neq 2\} = [0,2) \cup (2,\infty)$

Se tiene:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x-2} + \sqrt{x}$ Dominio $\{x|x \geq 0..y..x \neq 2\}$

$(f-g) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x-2} - \sqrt{x}$ Dominio $\{x|x \geq 0..y..x \neq 2\}$

$(fg)(x) = f(x)g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$ Dominio $\{x|x \geq 0..y..x \neq 2\}$

$\left(f/g\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{(x.-2)\sqrt{x}}$ Dominio $\{x|x > 0..y..x \neq 2\}$

Se observa que en el dominio de f/g se excluye 0 porque $g(0) = 0$.

b) Cada valor existe porque $x = 4$ está en el domino de cada función.

$$(f+g)(4) = f(4)+g(4) = \frac{1}{4-2} + \sqrt{4} = \frac{5}{2}$$

$$(f-g)(4) = f(4)-g(4) = \frac{1}{4-2} - \sqrt{4} = -\frac{3}{2}$$

$$(fg)(4) = f(4)g(4) = \left(\frac{1}{4-2}\right)\sqrt{4} = 1$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(4) = \frac{f(4)}{g(4)} = \frac{1}{(4.-2)\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

La gráfica de la función $f+g$ se puede obtener de las gráficas de f y g mediante adición gráfica. Significando que se suman las coordenadas y correspondientes.

Se puede ver en el gráfico.

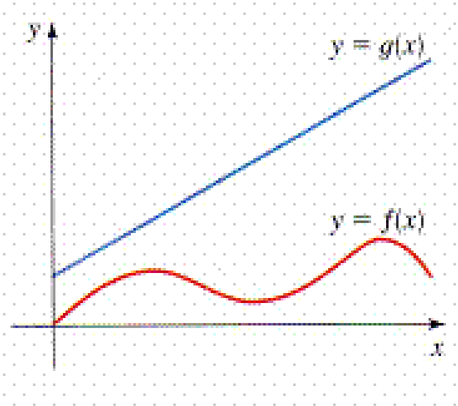


Figura 1

13.9. Composición de funciones

Para una nueva función es importante combinar las funciones

Suponga que $f(x) = \sqrt{x}..y..g(x) = x^2+1$. Se puede determinar una función h como

$$h(x) = f(g(x)) = f\left(x^2+1\right) = \sqrt{x^2+1}$$

La función h está definitiva por las funciones f y g de una modo interesante; dado un número x, se aplica primero a la función g, luego a la función f al resultado. En este caso, f es la regla “obtener la raíz cuadrada”, g es la regla “elevar al cuadrado después sumar 1”, y h es la regla “elevar al cuadrado, a continuación sumar 1, luego sacar la raíz cuadrada”. En conclusión, se obtiene la regla h al aplicar la regla g y luego la regla f.

Cuando se tiene dos funciones cualesquiera f y g, se inicia con un número x en el dominio de g y se obtiene la imagen $g(x)$, está en el dominio de f, y luego se puede determinar el valor de $f(g(x))$.

Al resultado es una nueva función $h(x) = f(g(x))$ obtenida al sustituir g en f. Se denomina la composición (o compuesta) de f y g y se expresa mediante $f \circ g$ (“f compuesta con g”)

Ejemplo Establecer la composición de funciones

Sea $f(x) = x^3$ y $g(x) = x - 4$

a) Encontrar las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ y sus dominios

b) Hallar $(f \circ g)(5)$ y $(g \circ f)(7)$

Solución

a) Se tiene

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ Definición de $f \circ g$

$= f(x-4)$ Definición de g

$= (x-4)^3$ Definición de f

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ Definición de $g \circ f$

$= g(x^3)$ Definición de f

$= x^3 - 4$ Definición de g

Los dominio de $f \circ g$ y $g \circ f$ son $\Re$

b)

$$(f \circ g)(5) = f(g(5)) = f(2) = 2^3 = 8$$

$$(g \circ f)(7) = g(f(7)) = g(343) = 343 - 3 = 340$$

Ejemplo

Determinar la composición de funciones

Si $f(x)=\sqrt{x}...y...g(x)=\sqrt{2-x}$, encuentre las siguientes funciones y sus dominios

a) $f\circ g$

b) $g\circ f$

c) $f\circ f$

d) $g\circ g$

Solución

a) $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ Definición de $f\circ g$

$=f\left(\sqrt{2-x}\right)$ Definición de g

$=\sqrt{\sqrt{2-x}}$ Definición de f

$=\sqrt[4]{2-x}$

El dominio de $f\circ g$ es $\{x|2-x\geq 0\}=\{x|x\leq 2\}=(-\infty,2]$

b) $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ Definición de $g\circ f$

$=g\left(\sqrt{x}\right)$ Definición de f

$=\sqrt{2-\sqrt{x}}$ Definición g

Para que $\sqrt{x}$ esté definida, se debe obtener $x\geq 0$. Para que $\sqrt{2-\sqrt{x}}$ esté definida, debe tener $2-\sqrt{x}\geq 0$, es decir, $\sqrt{x}\leq 2$, o bien $x\leq 4$.

Así, se tiene $0\leq x\leq 4$, por lo tanto el dominio de $g\circ f$ es el intervalo cerrado $[0,4]$.

c) $(f\circ f)(x)=f(f(x))$ Definición de $f\circ f$

$=f\left(\sqrt{x}\right)$ Definición de f

$=\sqrt{\sqrt{x}}$ Definición de f

$=\sqrt[4]{x}$

El dominio de $f\circ f$ es $[0,\infty)$

d) $(g\circ g)(x)=g(g(x))$ Definición de $g\circ g$

$=g\left(\sqrt{2-x}\right)$ Definición de g

$=\sqrt{2-\sqrt{2-x}}$ Definición de g

La expresión se define cuando $2-x\geq 0..y..2-\sqrt{2-x}\geq 0$. La primera desigualdad significa $x\leq 2$, y la segunda es equivalente a $\sqrt{2-x}\leq 2$, o $2-x\leq 4$, o $x\geq -2$. Por lo tanto, $-2\leq x\leq 2$, así que el dominio de $g\circ g$ es $[-2,2]$

13.10. Límite de una función.

Sea la función f(x), que está definida por los valores de x, cerca de c, con la particularidad de que no sea c misma.

Se dice que L, es el límite de la función f(x), cuando x tiende a c

Es decir que $\lim_{x \to 0} f(x) = L$ significa que cuando *x* está cerca, pero difiere de *c*, *f(x)* está cerca de *L.*

<u>Ejemplo:</u> Evaluar la función y su límite

$f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$ evaluar $Lim_{x \to 2} f(x)$

Si se sustituye x=5 en la función original, se obtiene 0/0, que es una indeterminación, lo que indica que para ese valor la función no está definida, pero $Lim_{x \to 2} f(x)$ si existe y se pude escribir:

$$f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)} = x + 5$$

Al eliminar el factor (x-5) es solamente valida cundo x≠5, y no es válida cuando x=5. Se pude determinar que x tiende a 5, la función x+5 está más cerca del valor 7. Por lo tanto:

$$Lim_{x \to 2} f(x) = Lim_{x \to 2} (x+5) = 7$$

Se debe tomar en cuenta los diferentes teoremas de límites.

1. $Lim_{x \to c} (mx + b) = mc + b$
2. $Lim_{x \to c} (mx + b) = mc + b$
3. $Lim_{x \to c} bf(x) = bLim_{x \to c} f(x)$
4. $Lim_{x \to c} \left[f(x) \right]^n = \left[Lim_{x \to c} f(x)^n \right]$
5. $Lim_{x \to c} \left[f(x) + h(x) \right] = Lim_{x \to c} f(x) + Lim_{x \to c} h(x)$
6. $Lim_{x \to c} \left[f(x) - h(x) \right] = Lim_{x \to c} f(x) - Lim_{x \to c} h(x)$
7. $Lim_{x \to c} \left[f(x) * h(x) \right] = Lim_{x \to c} f(x) * Lim_{x \to c} h(x)$

8. $Lim_{x\to c}\left[\frac{f(x)}{h(x)}\right] = \frac{Lim_{x\to c} f(x)}{Lim_{x\to c} h(x)}$

Ejemplo Encontrar el límite

$$Lim_{x\to 3}\frac{x^2}{2x-1} = \frac{Lim_{x\to 3}x^2}{Lim_{x\to 3}(2x-1)}$$

$$= \frac{(Lim_{x\to 3}x)^2}{6-1} = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5}$$

Ejercicios propuestos

Encontrar los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 3}(2x-8)$
2. $\lim_{x\to 3}\left(\frac{2}{x}+1\right)$
3. $\lim_{x\to -2}(x^2-3x+1)$
4. $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{9+x^2}}{x-3}$
5. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}$
6. $\lim_{x\to 4}\sqrt[3]{5x+7}$
7. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x}-\sqrt{5}}{1-x}$
8. $\lim_{x\to 2}\frac{3-\sqrt{4x+1}}{x^2-2x}$

l) Calcule el límite por la derecha de la siguiente función: $f(x) = 2x^2+3$

Límites de funciones trigonométricas.

Si c, es un número real en el dominio de la función trigonométrica El límite se obtiene utilizando los teoremas correspondientes, en los cuales se considera que u=f(x)

$$Lim_{x\to c} Senx = Senc$$
$$Lim_{x\to c} Cosx = Cosc$$
$$Lim_{x\to c} Tanx = Tanc$$
$$Lim_{x\to c} Cotx = Cotc$$
$$Lim_{x\to c} Secx = Secc$$
$$Lim_{x\to c} C\sec x = C\sec c$$

Ejemplo: Hallar el límite

$$Lim_{x\to 0} \frac{Sen3x}{x} = Lim_{x\to 0} \frac{Sen3x}{x} * \frac{3}{3} = Lim_{x\to 0} 3 * Lim_{x\to 0} \frac{Sen3x}{.3x} = 1 = 3*1 = 3$$

Ejemplo: Hallar el límite

$$Lim_{x\to 0} \frac{Sen(1-x)}{\sqrt{x}-1}$$
$$Lim_{x\to 0} \frac{Sen(1-x)}{\sqrt{x}-1} = Lim_{x\to 0} \frac{Sen(1-x)}{\sqrt{x}-1} * \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = Lim_{x\to 0} \frac{Sen(1-x)\sqrt{x}+1}{x-1} =$$
$$Lim_{x\to 0} \frac{Sen(1-x)}{x-1} * Lim_{x\to 0} \sqrt{x} - 1 = -1*2 = -2$$

Ejercicios Propuestos

Calcular el valor de los siguientes límites.

1. $\lim_{x\to 0} sen\ 5x$
2. $\lim_{x\to 1} 6\cos(x-1)$
3. $\lim_{x\to 0} \left[\frac{2x-1}{\cos x}\right]$
4. $\lim_{x\to 3} \left[\frac{3sen^2(x-3)}{x^2-6x+9}\right]$
5. $\lim_{x\to 2} \left[\frac{5x\ sen\ (x-2)}{x^2+2x}\right]$
6. $\lim_{x\to 2} \left[\frac{x-4}{(x^2-6x+8)\cot(x-2)}\right]$
7. $\lim_{x\to -2} \left[\frac{x^2+3x+2}{(x+2)\sec(x+2)}\right]$
8. $\lim_{x\to 0} sen\ 5x\cos 2x$
9. $\lim_{x\to 2} \left[\frac{7\ sen(x-2)\sec(x-2)}{\tan(x-2)}\right]$

10. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{2\ secx}{\csc x}\right]$

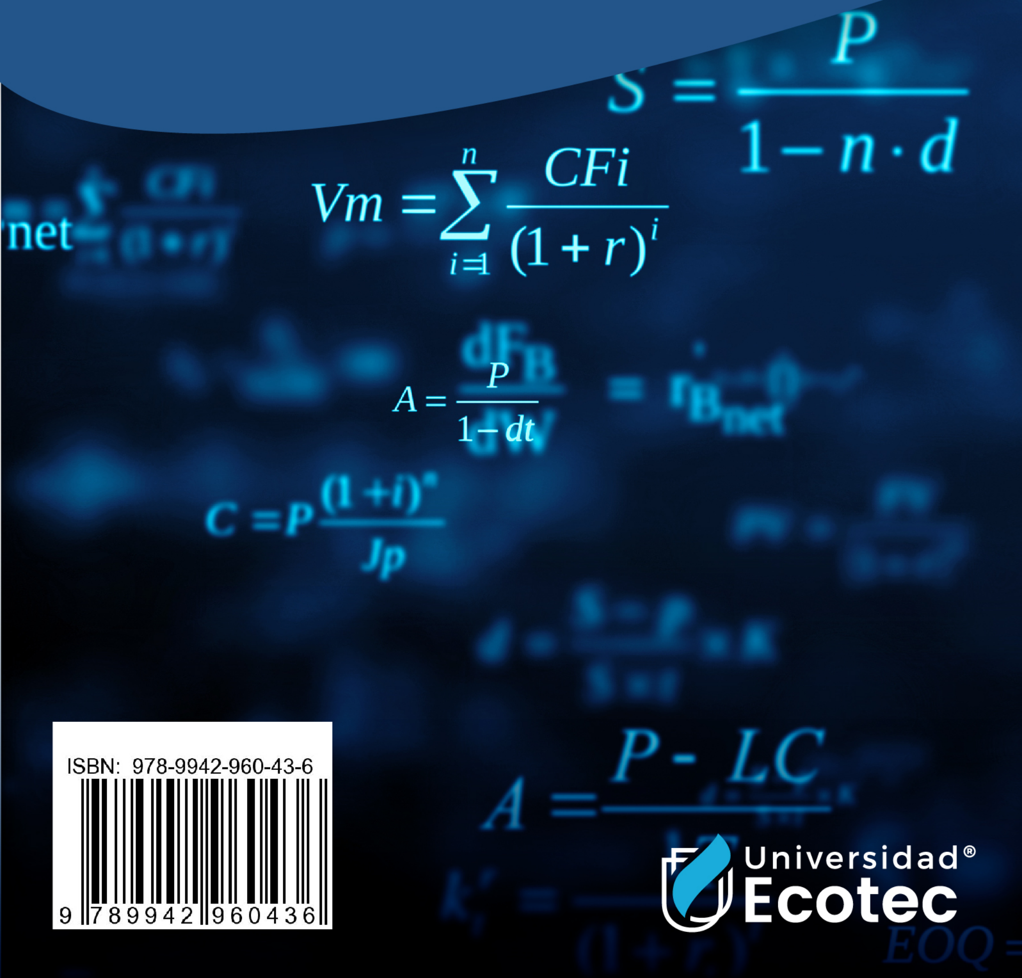
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arya, J. C. y Lardner, R. W. (2009). Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía. Pearson Educación, México. Quinta edición.
- Barreto, J. (última actualización, 2018). Matemáticas Previas al cálculo universitario: Precálculo | Udemy. Recuperado de https://www.udemy.com/matematicas-previas-al-calculo-universitario-precalculo/
- Becerril, R.; Jardón, D. R.; Reyes, J. G. (2002). CONCEPTOS DE PRECÁLCULO I: TRIGONOMETRÍA. Recuperado de http://mat.izt.uam.mx/mat/documentos/notas%20de%20clase/Precalculo.pdf
- Castillo, A. (2016). Problemario de precálculo y cálculo. Recuperado de http://ri.uaemex.mx/bitstream/handle/20.500.11799/64179/LIBRO%20PROBLEMARIO%20PRECALCULO%20Y%20CALCULO.pdf?sequence=1
- Garavito, G. (2005). Material de aritmética - álgebra - precálculo – trigonometría. Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito. Recueprado de https://tycho.escuelaing.edu.co/ecinfo2/asignaturas/mrey/material/material.htm
- Hoffmann, L. D. (2006). Cálculo Aplicado para Administración, economía y Ciencias Sociales. McGrawHill, México. Octava edición

- Insane Mclero. (2010) Administración y Calculo de tu empresa tp://es.slideshare.net/quique1796/calculo-para-administracin?related=1
- Marvin, L. B. (2002). Cálculo para Ciencias Económico-Administrativas. Pearson Educación.
- Stewart, J. (2016). Precálculo Matemáticas para el cálculo. Recuperado de http://mat.izt.uam.mx/mat/documentos/notas%20de%20clase/Precalculo.pdf
- Thomas, G. B. (2010). Thomas Cálculo una Variable. Pearson Educación México. Undécima edición.

Soporte matemático para el ingreso a la Universidad

Autor: Marco Antonio Jara Riofrío, Mgtr.



ISBN: 978-9942-960-43-6
9 789942 960436

Universidad® Ecotec